



Procedura computazionale per la determinazione del parametro $J_{integral}$ in strutture criccate a sviluppo non planare

M. Minotti

Università di Roma "Tor Vergata", Dipartimento di Ingegneria Meccanica, Via del Politecnico, 1 – 00133 Roma, e-mail: matteo.minotti@uniroma2.it

RIASSUNTO. Nel presente lavoro viene proposta una metodologia innovativa che consente di valutare il $J_{integral}$ in strutture danneggiate in cui l'applicazione della formulazione classica di Rice non è possibile a causa della curvatura non nulla della superficie di giacenza della cricca.

ABSTRACT. In this paper is proposed an innovative methodology to assess the $J_{integral}$ in damaged structures in which the application of classical Rice's formulation is not possible due to the curvature of fracture surface.

PAROLE CHIAVE. *Energy release rate; $J_{integral}$; analisi FEM di fratture.*

1 INTRODUZIONE

La progettazione di linee di trasporto per il gas richiede un compromesso ottimale tra la scelta della pressione di esercizio, le caratteristiche geometriche del condotto (diametro e spessore) e le proprietà meccaniche del materiale che lo andranno a costituire; la scelta è inoltre anche sensibilmente influenzata da considerazioni di carattere economico, concernenti l'installazione e successiva gestione della linea. La grande varietà di possibili soluzioni che si prospettano richiedono lo sviluppo di strumenti di calcolo specifici, in grado di stimare i margini di sicurezza in funzione degli eventi responsabili dei cedimenti della struttura, che nel caso dei gasdotti comportano danni considerevoli.

In questo contesto si colloca la procedura per il calcolo del $J_{integral}$ proposta in questo lavoro, che consente di valutare l'*energy release rate* di una cricca, per un materiale elastico non lineare, tenendo in considerazione i soli carichi membranali, ma giacente su una superficie a curvatura non nulla. La possibilità di conoscere l'entità del parametro $J_{integral}$ di un gasdotto soggetto a danno strutturale rappresenta uno strumento di indagine molto utile per l'analisi d'innesco e propagazione della frattura, soprattutto quando essa si manifesta con caratteristiche proprie della *brittle propagation*. In questa modalità la cricca in fase di avanzamento presenta una contenuta variabilità dell'assetto geometrico, conseguentemente un'analisi della stessa basata sul *CTOA (Crack Tip Opening Angle)* [1], ampiamente utilizzato per lo studio della *driving force* in campo duttile [2], non fornisce risultati esaustivi; per questa ed altre motivazioni la valuta-

zione dell'energia disponibile alla propagazione di una frattura in regime di fragilità si realizza quantificando l'*energy release rate* associata, valutabile con il $J_{integral}$ attraverso la formulazione di Rice, esclusivamente per strutture piane soggette a fratture di apertura in *MODO I* e relativamente ai soli carichi membranali agenti.

Da qui l'esigenza di definire una procedura che trascendesse i limiti intrinseci della formulazione di Rice, consentendo la determinazione del $J_{integral}$ anche per strutture a curvatura non nulla, come appunto i gasdotti.

2 VALUTAZIONE DEL $J_{integral}$ IN STRUTTURE DISCRETIZZATE AGLI ELEMENTI FINITI

Il parametro $J_{integral}$ di una struttura, soggetto o meno a frattura, è determinabile attraverso l'applicazione dell'integrale di circuitazione di Rice [3], calcolato lungo un generico percorso di integrazione Γ :

$$J = \int_{\Gamma} \left(w \cdot dy - T_i \frac{\partial u_i}{\partial x} ds \right) \quad (1)$$

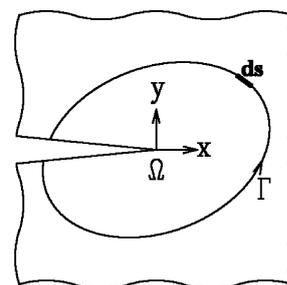


Figura 1

Dall'analisi dei termini della (1), si evince come l'applicazione della stessa può attuarsi solo per determinate configurazioni della struttura.

L'integrale di circuitazione effettua un bilancio energetico sull'oggetto interessato dal danno, fornendo in output la variazione di energia potenziale per unità di area di frattura sviluppata. Tale bilancio fu definito da Rice relativamente a fratture caratterizzate da uno sviluppo planare, rispetto ad un sistema di riferimento cartesiano collocato all'apice della cricca, che presenta l'asse x coincidente con la direzione di propagazione della cricca e l'asse y parallelo al primo e giacente sul piano di frattura. Ne consegue come l'applicazione a strutture criccate il cui sviluppo geometrico non sia planare risulti non praticabile a meno di evidenti approssimazioni derivanti dal trascurare i contributi relativi alla componente cartesiana z .

Si consideri a riguardo un semicilindro, intagliato su un bordo lungo la generatrice superiore del medesimo, e sottoposto ad un carico di pressione interna (Fig. 2a).

Se si volesse applicare la (1) alla geometria considerata, si dovrebbe definire su di essa un circuito di integrazione che abbracci l'apice della frattura (Fig. 2b). Come già precedentemente affermato, non è possibile applicare la (1) senza commettere forti errori di approssimazione. Una possibile soluzione risiede nello "stirare" il tubo in

modo tale da annullare la sua curvatura e ricondursi così al caso noto di Fig. 1. Una visualizzazione grafica di ciò è rappresentata in Fig. 3a.

Il tratteggio in rosso rappresenta la traslazione che subirebbe la *path* di integrazione. In realtà la soluzione proposta non è tecnicamente corretta, in quanto si verrebbe a proiettare sul piano xy il campo di tensioni e spostamenti del tubo (che è tridimensionale), perdendo inevitabilmente parte delle aliquote relative alla direzione z .

Un'alternativa percorribile prevede la discretizzazione della struttura in elementi finiti. A titolo di esempio si pensi di applicare una *mesh* regolare al tubo utilizzando elementi di tipo *SHELL* (Fig. 3b).

Si definisca un percorso di integrazione (che per semplicità sarà quadrangolare (Fig. 4a)), come previsto dall'integrale di Rice (1). Come si può notare dalla figura, la *path* introdotta interseca i segmenti estremali degli elementi sui quali poggia, costituendo in ogni elemento attraversato delle *sotto-path* di integrazione.

Ora si focalizzi l'attenzione sul primo degli elementi intersecati dal percorso (Fig. 4b): se si considera l'elemento come una piastra rettangolare, l'applicazione della (1) è attuabile in quanto si verificano le succitate condizioni di planarità della struttura. In realtà, il rispetto dei requisiti geometrici non è sufficiente a garantire l'applicabilità della (1) a causa del sistema di

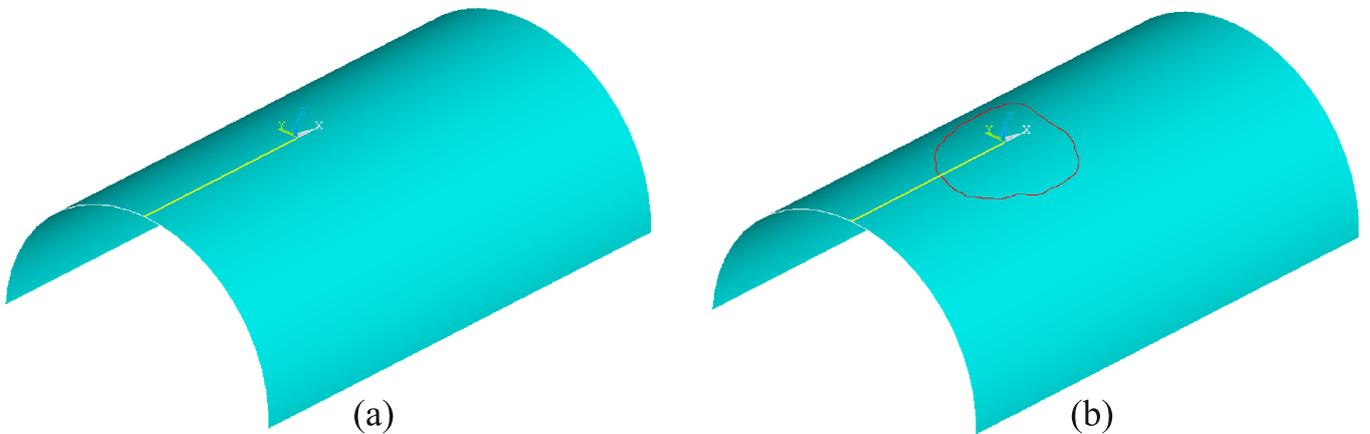


Figura 2

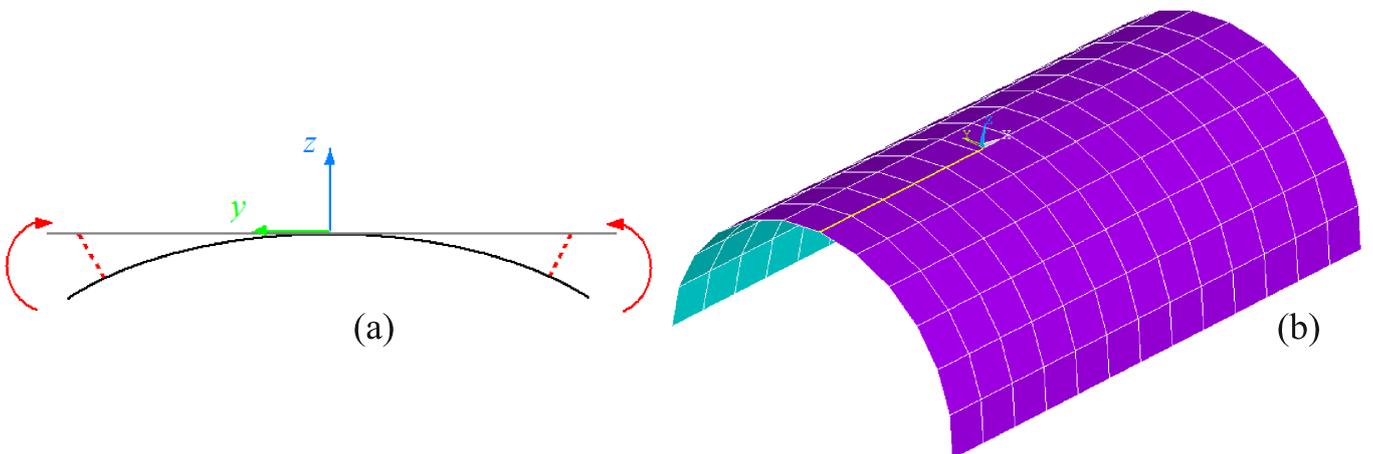


Figura 3

riferimento utilizzato (Fig. 4b), che non è adeguato allo scopo.

Osservando frontalmente l'elemento, si nota infatti come questo sia disassato ed inclinato rispetto al sistema di riferimento globale del tubo (Fig. 4b): la conseguenza di ciò è che il campo di tensioni e deformazioni dell'elemento, rispetto al suddetto sistema di coordinate, presenta componenti in tutte le direzioni, e non più solo in due (ovvero le componenti x ed y sul piano di frattura) come richiesto dalla formulazione di Rice. Se il sistema di riferimento presentasse una diversa orientazione, ovvero con assi x e y giacenti sulla superficie ed asse z definito di conseguenza, l'applicazione della (1) fornirebbe in output una valutazione corretta del parametro $J_{integral}$ relativa all'elemento.

Un'osservazione d'obbligo è la seguente: il $J_{integral}$ è un parametro che fornisce indicazione della variazione di energia potenziale per unità di superficie di frattura prodotta. È per definizione uno scalare, in quanto frutto di considerazioni di carattere energetico, di conseguenza è plausibile ipotizzare che la scelta di un sistema di riferimento rispetto ad un altro non influenzi l'entità della valutazione dello stesso, a meno di determinati requisiti imposti dalla rappresentazione indicizzata in notazione tensoriale della (1).

Si ipotizzi di suddividere una struttura criccata in n elementi *shell*, m dei quali attraversati da un generico percorso di integrazione per l'applicazione della (1): si

considerino singolarmente gli m elementi, calcolando per ognuno il $J_{integral}$, integrando su una *path* corrispondente al tratto di percorso principale delimitato dai lati dell'elemento stesso, avendo l'accortezza di utilizzare ogni volta una terna cartesiana il cui piano xy è giacente sulla superficie ed asse y orientato parallelamente all'intaglio. Il valore del $J_{integral}$ dell'intera struttura sarà quindi dato da:

$$J_{int} = \sum_{i=1}^m J_{int}^i \quad (2)$$

3 VALUTAZIONE DEL J DI UNA PIASTRA E DI UN TUBO SOGGETTI A FRATTURA LONGITUDINALE MEDIANTE IL CODICE COMMERCIALE ANSYS®.

La procedura proposta (riassunta nella (2)), è stata implementata all'interno di una macro eseguibile dal software multipurpose commerciale *Ansys*® per l'analisi strutturale con gli elementi finiti. Di seguito verranno illustrati gli step logici che costituiscono l'algoritmo di calcolo facendo riferimento ad un'applicazione effettuata su di una piastra rettangolare intagliata su un bordo e soggetta a tensione nominale laterale nota (Fig. 5).

Le caratteristiche della piastra sono le seguenti:

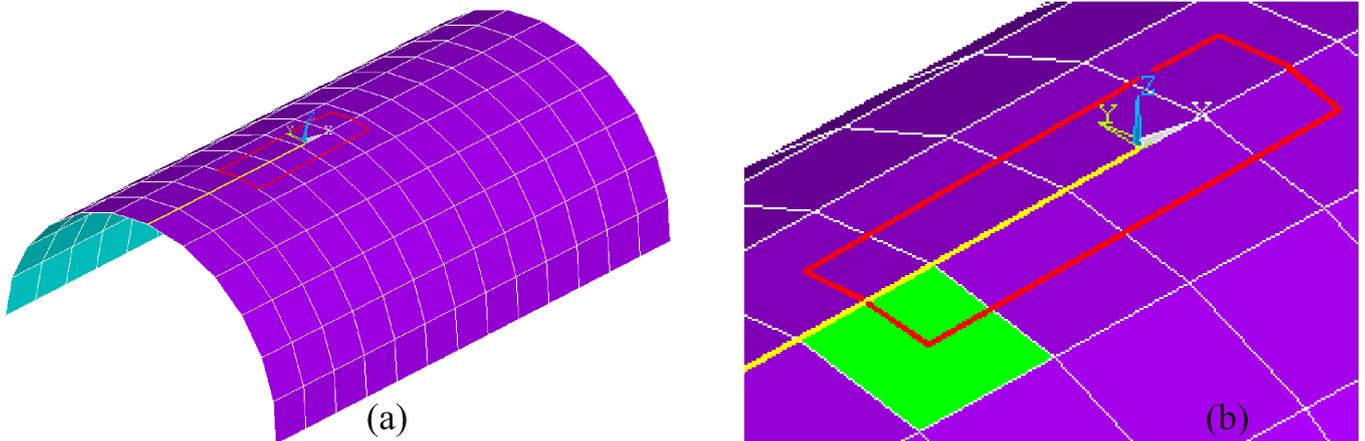


Figura 4

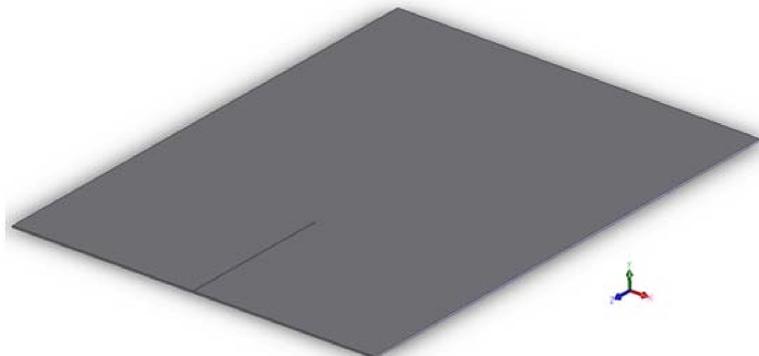


Figura 5

LARGHEZZA = 1915mm
 LUNGHEZZA = 3000mm
 INTAGLIO = 400mm
 SPESSORE = 25mm
 Mod. di YOUNG = 206000MPa
 POISSON = 0.3
 TENS. NOM. LAT. = 200MPa

A seguito della simulazione FEM il valore del $J_{integral}$ associato all'intaglio, ottenuto applicando direttamente la formulazione di Rice (1) (Fig. 8a), fornisce il risultato di 286.60 N/mm.

Utilizzeremo successivamente il dato ottenuto come riscontro per verificare l'attendibilità della (2).

Considereremo al riguardo come percorso di integrazione quello visualizzato in Fig. 6a: la scelta di una configurazione rettangolare per la *path* semplificherà notevolmente l'implementazione della procedura. Si supponga di dividere il percorso suddetto in 5 porzioni (Fig. 6a), e si focalizzi l'attenzione sul primo dei tratti ottenuti (numero 1); il punto iniziale e finale di questo verranno indicati rispettivamente con *PTI* e *PTE*.

La valutazione del $J_{integral}$ della piastra verrà condotta sommando i $J_{integral}$ parziali di ogni elemento attraversato dalla *path* principale, definendo per ognuno un apposito sistema di riferimento locale: questo dovrà essere giacente sulla superficie dell'elemento ed avere orientazione adeguata (Fig. 7a). L'origine viene presa

coincidente con il centroide dell'elemento, mentre l'asse X' ed Y' orientati in modo tale che le rispettive proiezioni sul piano XY del sistema di riferimento globale siano paralleli agli assi X e Y dello stesso.

Per ottenere ciò utilizzando i comandi testuali di *Ansys®*, è necessario determinare le coordinate dei punti di intersezione del percorso di integrazione con gli elementi. Una delle strategie percorribili risiede nel determinare l'equazione della curva che definisce la traccia della *path* generale (Fig. 6a) sull'elemento i -esimo, ed in seguito determinare algebricamente le intersezioni tra la curva ottenuta e le frontiere dello stesso. Si procede calcolando col metodo dei minimi quadrati l'equazione parametrica del piano che meglio approssima la superficie dell'elemento, note le coordinate dei quattro nodi che lo compongono:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \pi}{\partial a} &= 2a \sum x^2 - 2 \sum x + 2b \sum xy + 2c \sum xz = 0 \\ \frac{\partial \pi}{\partial b} &= 2b \sum y^2 - 2 \sum y + 2a \sum xy + 2c \sum yz = 0 \\ \frac{\partial \pi}{\partial c} &= 2c \sum z^2 - 2 \sum z + 2a \sum xz + 2b \sum yz = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow a, b, c \quad (3)$$

$$ax + by + cz - 1 = 0 \quad (4)$$

Successivamente si impone la condizione di intersezio-

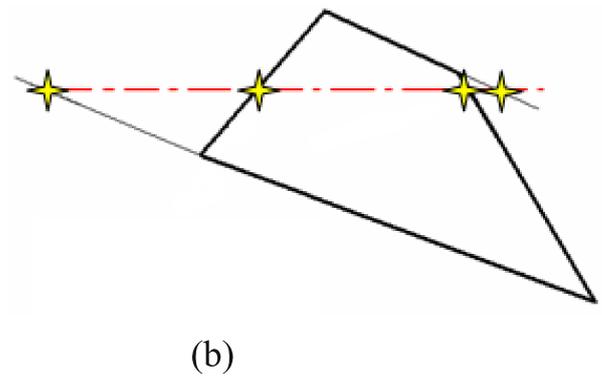
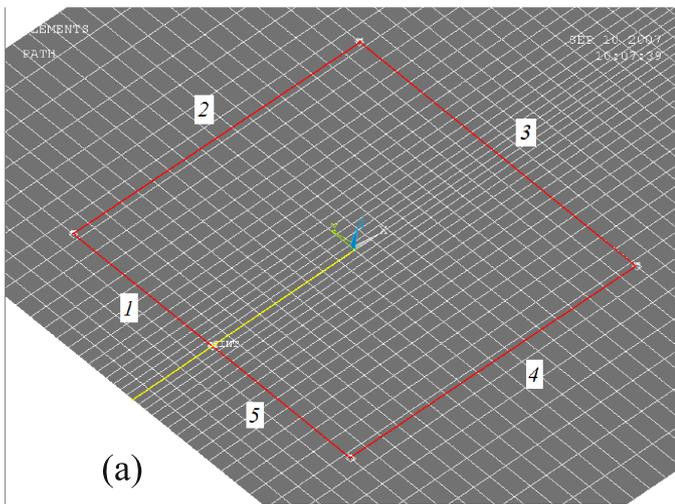


Figura 6

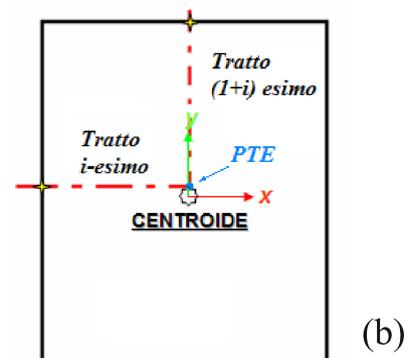
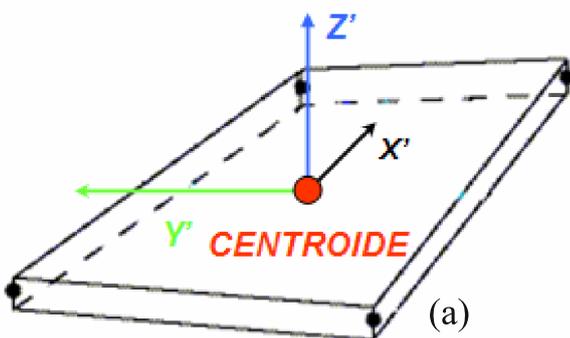


Figura 7

ne dell'equazione (3), aggiornata con i valori di a , b e c desunti dal sistema ai minimi quadrati (4), con l'equazione di un piano parallelo all'asse Z e contenente il tratto di *path* delimitato dai punti *PTI* e *PTE*. Il risultato di tale operazione è l'equazione algebrica di una retta che descrive giustappunto la traccia del percorso d'integrazione sull'elemento, con la quale si potrà determinare le coordinate dei punti d'intersezione che questa ha con la frontiera dell'elemento. Se questo è un quadrilatero regolare, ed il tratto di *path* considerato è parallelo ad una delle due coppie di lati omologhi (come accade in Fig. 4b) la rilevazione dei punti d'intersezione è univoca ed immediata, ma se la *mesh* e/o la *path* non hanno geometrie regolari (Fig. 6b) è invece necessario determinare quali tra le quattro soluzioni possibili sono effettivamente appartenenti alla frontiera dell'elemento. Per far ciò è sufficiente calcolare, per ogni punto di intersezione individuato, le distanze che intercorrono rispettivamente tra il punto in questione e i due nodi delimitanti il lato su cui tale punto insiste. Se la somma in modulo delle due distanze calcolate è uguale all'estensione del lato considerato, il punto d'intersezione viene considerato appartenente all'elemento e le sue coordinate memorizzate. È sempre comunque indispensabile eseguire un ulteriore controllo sulle coordinate dei precedenti punti: questi devono avere distanza dall'origine del sistema di riferimento globale minore del punto *PTE*. Se la condizione non è verificata significa che il punto *PTE* è interno all'elemento, e di conseguenza si dovrà procedere col tratto successivo di discretizzazione della *path* (tratto di Fig. 7b).

Le operazioni descritte finora, ovvero definizione del sistema di riferimento locale, individuazione e selezione dei punti d'intersezione tra la *path* e la frontiera, vanno iterate per ogni elemento attraversato dal percorso di integrazione. Ogni segmento di percorso individuato rappresenta la *sotto-path* da utilizzare per l'applicazione della (1) all'interno dell'elemento interessato ed in riferimento al sistema locale precedentemente introdotto. L'accortezza di utilizzare un sistema di coordinate "specifico" avente le caratteristiche enunciate precedentemente, consente di avvalersi della formulazione di Rice

senza contravvenire ai requisiti preposti dalla stessa, che implicano una rappresentazione congruente (in riferimento a Fig. 1) dello stato di tensione e deformazione della struttura danneggiata.

In Fig. 8b è riportata la struttura discretizzata della piastra intagliata dopo l'applicazione della procedura proposta: come si può notare nell'immagine sono visibili i sistemi di riferimento locali introdotti negli elementi, che si sovrappongono al percorso d'integrazione scelto. Di seguito si riportano i valori relativi ai 5 tratti di suddivisione della *path* principale precedentemente introdotti (Fig. 6a):

$$\begin{aligned} JINTG1 &= 7.363 \text{ N/mm} \\ JINTG2 &= 108.109 \text{ N/mm} \\ JINTG3 &= 51.341 \text{ N/mm} \\ JINTG4 &= 108.352 \text{ N/mm} \\ JINTG5 &= 7.369 \text{ N/mm} \end{aligned}$$

È interessante constatare come in accordo con la configurazione geometrica e di carico della struttura anche i valori del $J_{integral}$ sono simmetrici rispetto l'intaglio. La somma algebrica delle cinque aliquote fornisce il risultato di 282.53 N/mm , che si discosta di un modesto 1.2% dal dato ottenuto applicando direttamente la (1), causato quasi certamente da fattori di natura computazionale.

Il confronto tra le due metodologie conferma la bontà sia delle assunzioni fatte per la (2) che dell'implementazione eseguita in *Ansys*®. Un'ulteriore riscontro della robustezza dell'algoritmo si è avuta applicando la procedura proposta sulla medesima piastra alla quale era stata applicata una *mesh* irregolare (Fig. 8c), ottenendo un valore pari a 292.00 N/mm , avente uno scarto del 2.1% rispetto alla (1).

L'applicazione della procedura alla piastra è stata effettuata per verificare l'esattezza delle assunzioni fatte; si vuole ora mostrare i risultati ottenuti dall'utilizzo della procedura su di un semi tubo da 48" caricato internamente a pressione e soggetto ad una frattura longitudinale giacente sulla generatrice superiore del cilindro (Fig. 9).

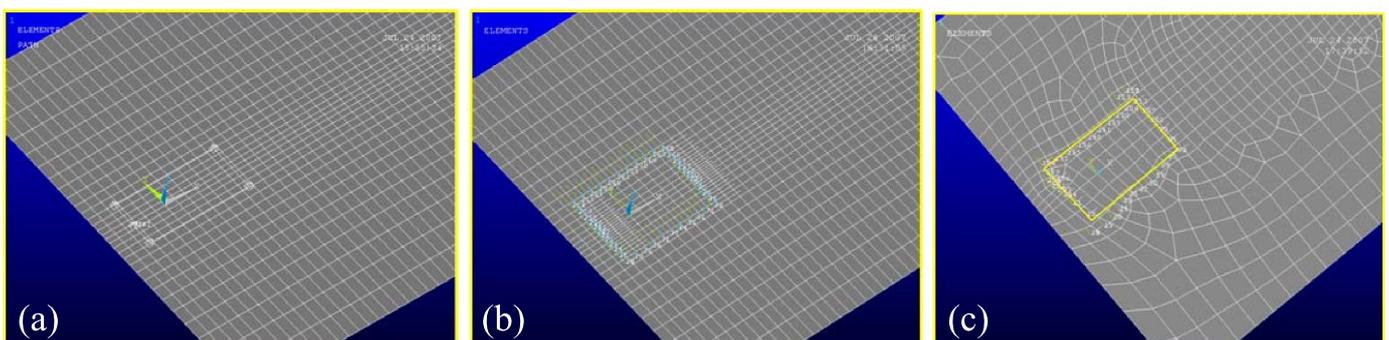


Figura 8

LUNGHEZZA = 3000mm
 RAGGIO = 610mm
 INTAGLIO = 400mm
 SPESSORE = 25mm
 Mod. di YOUNG = 206000MPa
 POISSON = 0.3
 PRESSIONE = 82bar

Le caratteristiche geometriche e di carico scelte per il tubo sono tali da far sì che questo si ottenga piegando opportunamente la piastra dell'esempio precedente, e commutando il carico di trazione laterale con uno di pressione interna, facendo in modo che la σ circonferenziale del tubo sia pari alla tensione (in direzione della sollecitazione) della piastra. In Fig. 10a è rappresentata l'applicazione della (2) sulla struttura, mentre in Fig. 10b l'andamento dell'intensità di deformazione elastica della stessa.

Il valore del $J_{integral}$ ottenuto è 930.10 N/mm, che si discosta notevolmente dall'omologo valore osservato per la piastra. Le motivazioni di tale fenomeno sono ovviamente molteplici, e vanno ricercate principalmente nel diverso campo di tensioni e spostamenti derivanti dal sollevamento dei lembi fratturati ad opera dell'azione interna della pressione. Si evince come un valore effettivamente più consistente del $J_{integral}$ rispetto al ca-

so della piastra sia generato dal contributo energetico non trascurabile addotto dalle macrodeformazioni dei *flaps* posti al ridosso dell'apice dell'intaglio, che operano concordemente con l'atto della propagazione del danno; un riscontro di ciò è ottenibile visualizzando l'intensità di deformazione del tubo (Fig. 10b), che rispetto al caso della piastra è un 30% più elevato nella regione in prossimità della cricca.

4 CONCLUSIONI

Nel presente lavoro è stata presentata una procedura numerica che consente di valutare in ambiente FEM il parametro $J_{integral}$ di strutture danneggiate a sviluppo non planare, permettendo quindi di trascendere i limiti imposti dalla formulazione canonica proposta da Rice. Si è mostrata l'equivalenza che sussiste nell'utilizzare l'integrale di circuitazione e la procedura proposta al caso della piastra piana intagliata, evidenziando la ridottissima dipendenza che questa ha nei confronti della geometria della *mesh*, e fornendo nel contempo una descrizione sugli aspetti principali dell'algoritmo di calcolo utilizzato. La successiva applicazione al caso del tubo danneggiato ha dimostrato come sia realizzabile una va-

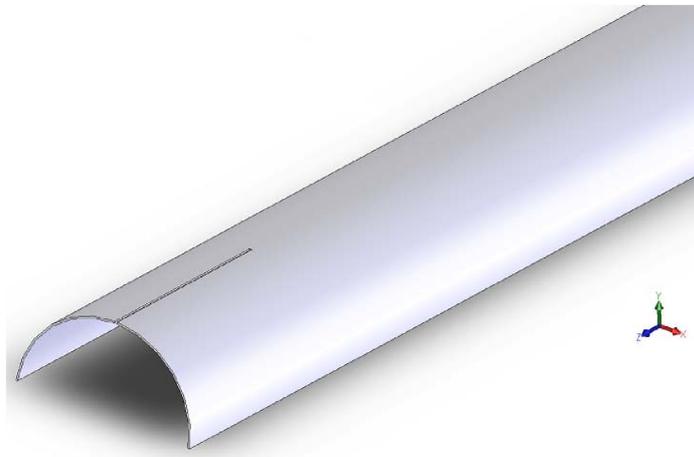


Figura 9

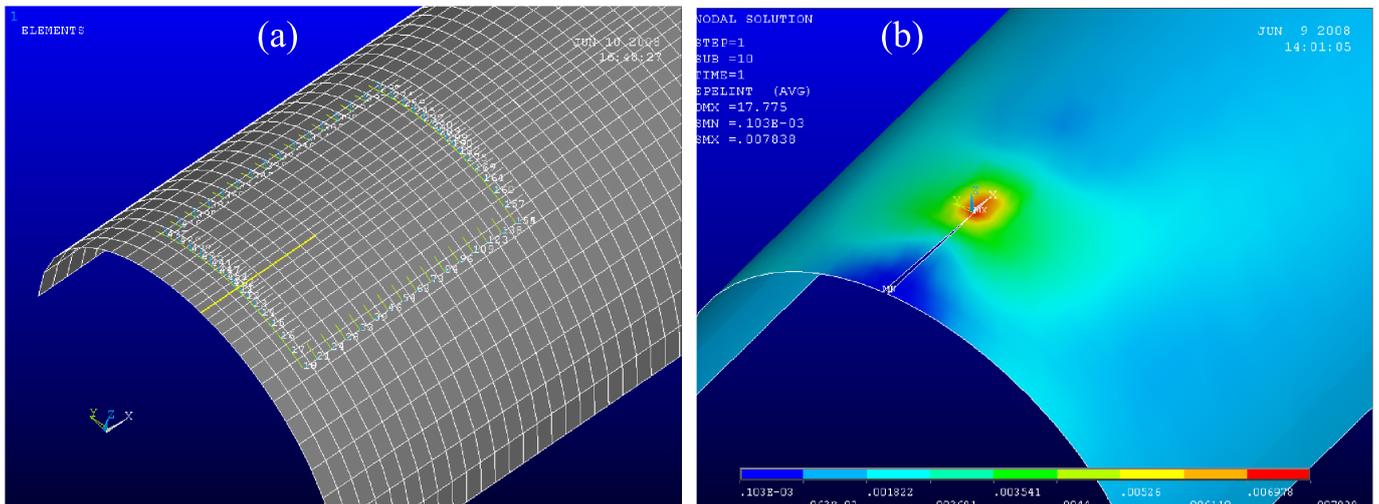


Figura 10

lutazione del $J_{integral}$ di una frattura giacente su una superficie curva, e come l'entità rilevata sia conforme e congruente con la configurazione della struttura esaminata.

5 BIBLIOGRAFIA

- [1] F.M. Burdekin, D.E.W. Stone, *Journal of Strain Analysis*, 1 (1966) 145-153.
- [2] W.A. Maxey, 5th Symposium on Line Pipe Research, ed. AGA (1974).
- [3] t.l. Anderson, *Fracture Mechanics*, CRC Press, Boca Raton, Florida (1995).
- [4] G. Berardo, G. Mannucci, P. Salvini, *The International Pipeline Conference*, Calgary, Alberta, Canada (2000).
- [5] AGA contract nos. PR-15-9121 and PR-15-9209, "The development and validation of a ductile fracture analysis model", final report (1994).
- [6] T. Nishioka, S. N. Atluri, *Engineering Fracture Mechanics*, 18 (1983) 1-22.
- [7] G. Demofonti, I. Hadley, *The international Conference on Pipeline Reliability*, Gulf Publ. Comp., Calgary (1992) VIII-4-1.
- [8] M.F. Kanninen et al, "The development and validation of a ductile fracture analysis model", final report AGA contract nos. PR-15-9121 and PR-15-9209 (1994).
- [9] M.F. Kanninen, C.H. Popelar, *Advanced Fracture Mechanics*, Oxford University Press, New York (1994).