

LE VERIFICHE DI RESISTENZA A FATICA IN SOLLECITAZIONI MULTIASSIALI AD AMPIEZZA VARIABILE

R. Tovo¹, L. Susmel², D. Benasciutti¹, A. Cristofori¹

¹Departmento di Ingegneria, Università of Ferrara, Ferrara (Italia)

²Department of Mechanical Engineering, Trinity College, Dublin (Ireland)

E-mail: rtovo@ing.unife.it

SOMMARIO

Nel presente lavoro è affrontato il problema della valutazione del danneggiamento prodotto da sollecitazioni affaticanti multiassiali caratterizzate da ampiezza variabile nel tempo. Vengono esaminati alcuni metodi, noti in letteratura, per individuare il piano critico di nucleazione della cricca di fatica, sulla base della massima ampiezza della tensione tangenziale. Viene inoltre proposto un approccio originale per l'individuazione della direzione critica sulla base della varianza della sollecitazione che è rappresentativa della variazione temporale complessiva della sollecitazione stessa. Tale metodo permette di raggiungere un'elevata efficienza nel calcolo del danneggiamento mediante metodi numerici ed è formulabile in termini analitici in casi semplici.

1 INTRODUZIONE

Nella fatica multiassiale, molti criteri di resistenza sviluppati per la valutazione del limite di fatica, assumono come parametro significativo l'ampiezza della tensione tangenziale agente su un piano generico, o altri parametri tensionali assimilabili a tensioni tangenziali. Il piano e la direzione dove il parametro tensionale raggiunge la massima ampiezza, vengono denominati piano e direzione "critica" [0-0].

La determinazione delle direzioni critiche è quindi una operazione di fondamentale importanza che potrebbe essere eliminata in teoria solo ricorrendo a grandezze scalari, come ad esempio le tensioni equivalenti statiche o grandezze di tipo energetico. Purtroppo gli scalari definiti, seppure a volte utilizzati nella progettazione a fatica multiassiale, divengono completamente inutili quando la sollecitazione presenta sfasamenti o ampiezze variabili.

Pertanto, in storie di carico reali, non vi è, di fatto, alcuna alternativa affidabile alla ricerca delle direzioni critiche e per tale operazione sono presenti in letteratura diverse metodologie di indagine e calcolo [0-0]. Diversi motivi rendono tuttavia le procedure disponibili non particolarmente efficienti:

- 1) in primo luogo, le procedure sono definite solo numericamente, quindi, anche per i casi più semplici, non è disponibile alcuna soluzione analitica esplicita per il calcolo di direzioni critiche e ampiezze;
- 2) gli algoritmi numerici disponibili sono poco efficienti dal punto di vista computazionale, quindi i tempi di analisi divengono molto lunghi nel caso di storie di carico reali;

3) nel caso di ampiezza di sollecitazione variabile, risulta inoltre discutibile se la direzione critica sia quella su cui agisce la massima ampiezza, o se esistano altre direzioni critiche in cui l'accumulo di danneggiamento è superiore.

Pertanto sarebbe desiderabile sviluppare una metodologia di indagine che affronti e risolva i problemi delineati. In questa ottica, il presente articolo propone una semplice procedura, basata sulle proprietà statistiche dei segnali variabili nel tempo, per valutare velocemente possibili direzioni critiche di danneggiamento per la stima della resistenza a fatica. Il metodo proposto studia la varianza dei segnali ed è applicabile a tutti i criteri di resistenza potendo investigare sia le tensioni tangenziali in un tensore delle tensioni, sia spazi vettoriali multi-dimensionali, come nel criterio di Crossland [0].

2 ANALISI DELLA VARIANZA

Si supponga di dover determinare il piano e/o la direzione dove una grandezza ingegneristica ritenuta importante (tensione, deformazione, ecc.) assume la massima ampiezza o la massima variazione temporale complessiva.

La massima ampiezza può determinarsi accoppiando i valori della sollecitazione per tutti gli istanti temporali, con una procedura alquanto dispersiva, che richiede molto tempo di calcolo.

Al contrario, in questa memoria ricerchiamo una grandezza matematica che sia rappresentativa della variazione temporale complessiva, proporzionale all'ampiezza nel caso di storie ad ampiezza costante e facilmente calcolabile. La possibilità che prenderemo in considerazione è l'utilizzo della varianza del segnale: si consideri un processo $s(t)$, definito in un intervallo $[0, T]$ e avente valore medio $m = E(s(t))$, la varianza è quindi definita come:

$$\mathbf{Var}(s(t)) = \frac{1}{T} \int_0^T (s(t) - m)^2 dt \quad (1)$$

Nel caso di segnali sinusoidali, la varianza è proporzionale all'ampiezza del segnale; d'altra parte, nelle sollecitazioni random gaussiane monoassiali, il danneggiamento a fatica è molto complesso da valutare, ma può essere in genere espresso come [0]:

$$\bar{D}_{NB} = \alpha C^{-1} \left(\sqrt{2 \mathbf{Var}(s)} \right)^k \Gamma \left(1 + \frac{k}{2} \right) \quad (2)$$

dove "k" è la pendenza e "C" la resistenza di riferimento della curva di resistenza a fatica, "α" è una costante variabile tra 0 e 1 in funzione della regolarità del segnale e "Γ" è la funzione statistica gamma.

E' quindi evidente che, anche in condizioni molto dissimili, il danneggiamento a fatica in condizioni monoassiali, aumenta all'aumentare della varianza della sollecitazione.

Si consideri quindi un qualsiasi criterio di resistenza a fatica multiassiale che si basi su una grandezza proiettata su un piano e/o una direzione generica. Definiamo piano e direzione "danneggiante", il piano e la direzione dove la grandezza prescelta assume la massima varianza.

Nel seguito ci si concentrerà maggiormente sui criteri che si basano sulla variazione della tensione tangenziale, risolta, anche se i calcoli seguenti possono essere estesi anche ad altri criteri.

2.1 Preliminari matematici

Si consideri un sistema di riferimento XYZ su un piano Π ; un piano generico Δ , di normale \mathbf{n} , ha un sistema di riferimento locale $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{n})$ in Figura 1, con \mathbf{a} intersezione di Δ con Π , e \mathbf{b} sul piano Δ e perpendicolare ad \mathbf{a} , e definito in funzione di due variabile trigonometriche:

$$\mathbf{n} = \begin{bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin(\theta) \cos(\varphi) \\ \sin(\theta) \sin(\varphi) \\ \cos(\theta) \end{bmatrix}; \quad \mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin(\varphi) \\ -\cos(\varphi) \\ 0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) \cos(\varphi) \\ \cos(\theta) \sin(\varphi) \\ -\sin(\theta) \end{bmatrix} \quad (3)$$

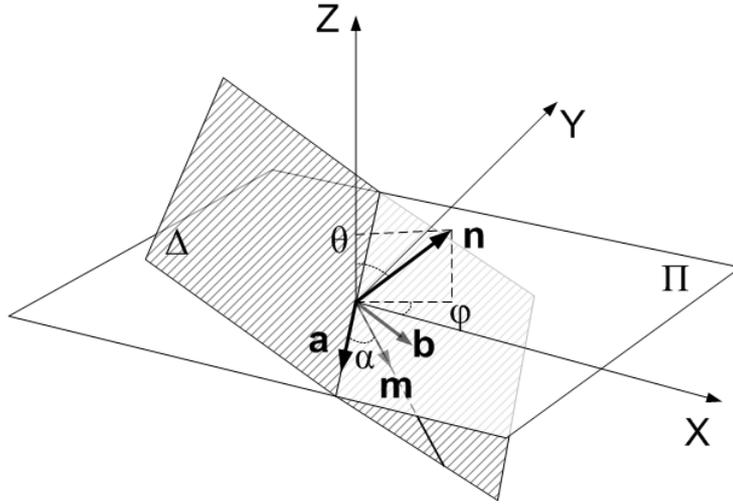


Figura 1: sistema di riferimento (angoli positivi anti-orari).

Consideriamo una direzione \mathbf{m} sul piano Δ , determinata da un angolo α misurato da \mathbf{a} :

$$\mathbf{m} = \begin{bmatrix} m_x \\ m_y \\ m_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) \sin(\varphi) + \sin(\alpha) \cos(\theta) \cos(\varphi) \\ -\cos(\alpha) \cos(\varphi) + \sin(\alpha) \cos(\theta) \sin(\varphi) \\ -\sin(\alpha) \sin(\theta) \end{bmatrix} \quad (4)$$

Sia $\bar{\boldsymbol{\sigma}}(t)$ un generico tensore delle tensioni variabile nel tempo. Quindi il vettore generico $\mathbf{t}(t)$ agente su Δ e la tensione tangenziale $\tau_m(t)$, agente su Δ lungo la direzione \mathbf{m} sono:

$$\mathbf{t}(t) = \bar{\boldsymbol{\sigma}}(t) \mathbf{n} \quad ; \quad \tau_m(t) = \mathbf{m} \bullet \mathbf{t}(t) = \mathbf{m} \bullet \bar{\boldsymbol{\sigma}}(t) \mathbf{n} \quad (5)$$

La tensione tangenziale $\tau_m(t)$ è uno scalare che dipende dal tensore $\bar{\boldsymbol{\sigma}}(t)$ e dalle direzioni considerate, quindi dagli angoli $(\theta, \varphi, \alpha)$. Rispetto al sistema XYZ, $\tau_m(t)$ si può calcolare:

$$\tau_m(t) = \begin{bmatrix} m_x & m_y & m_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_x(t) & \tau_{xy}(t) & \tau_{xz}(t) \\ \tau_{xy}(t) & \sigma_y(t) & \tau_{yz}(t) \\ \tau_{xz}(t) & \tau_{yz}(t) & \sigma_z(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{bmatrix} \quad (6)$$

Risulta più opportuno riscrivere la relazione precedente in forma vettoriale; rappresentiamo quindi il tensore $\bar{\sigma}(t)$ come un vettore a sei componenti $\mathbf{s}(t)$:

$$\mathbf{s}(t) = [\sigma_x(t) \quad \sigma_y(t) \quad \sigma_z(t) \quad \tau_{xy}(t) \quad \tau_{xz}(t) \quad \tau_{yz}(t)] \quad (7)$$

Quindi Eq. (6) può essere riscritta come:

$$\tau_m(t) = \mathbf{d} \cdot \mathbf{s}(t) \quad (8)$$

dove \mathbf{d} è il seguente vettore dei coseni direttori:

$$\mathbf{d} = [n_x m_x \quad n_y m_y \quad n_z m_z \quad n_x m_y + n_y m_x \quad n_x m_z + n_z m_x \quad n_y m_z + n_z m_y] \quad (9)$$

Il vettore \mathbf{d} può essere esplicitato in diverse forme, ad esempio:

$$\mathbf{d} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} (\sin(\theta) \sin(2\varphi) \cos(\alpha) + \sin(\alpha) \sin(2\theta) \cos(\varphi)^2) \\ \frac{1}{2} (\sin(\theta) \sin(2\varphi) \cos(\alpha) + \sin(\alpha) \sin(2\theta) \sin(\varphi)^2) \\ -\frac{1}{2} \sin(\alpha) \sin(2\theta) \\ \frac{1}{2} \sin(\alpha) \sin(2\varphi) \sin(2\theta) - \cos(\alpha) \cos(2\varphi) \sin(\theta) \\ \sin(\alpha) \cos(\varphi) \cos(2\theta) + \cos(\alpha) \sin(\varphi) \cos(\theta) \\ \sin(\alpha) \sin(\varphi) \cos(2\theta) - \cos(\alpha) \cos(\varphi) \cos(\theta) \end{bmatrix} \quad (10)$$

A questo punto è possibile impostare il calcolo della varianza di $\tau_m(t)$ utilizzando la seguente relazione:

$$\mathbf{Var}(\tau_m(t)) = \mathbf{Var}\left(\sum_k d_k s_k(t)\right) = \sum_i \sum_j d_i d_j \mathbf{Cov}(s_i(t), s_j(t)) \quad (11)$$

essendo:

$$\mathbf{C} = [C_{ij}] \quad C_{ij} = \mathbf{Cov}(s_i(t), s_j(t)) \quad i, j = 1, \dots, 6 \quad (12)$$

la matrice di covarianza del vettore $\mathbf{s}(t)$; quando $i = j$ si ha $\mathbf{Cov}(s_i(t), s_i(t)) = \mathbf{Var}(s_i(t))$ [0]. Si può inoltre verificare che la varianza può essere anche espressa come:

$$\mathbf{Var}(\tau_m(t)) = \mathbf{d}^T \mathbf{C} \mathbf{d} \quad (13)$$

La direzione danneggiante è quindi definita come la direzione \mathbf{m} dove la varianza è massima, essendo la dipendenza dalla direzione espressa nel vettore \mathbf{d} , in funzione dei termini trigonometrici sopra definiti. A questo punto si presentano alcuni esempi applicativi, per illustrare l'applicazione della teoria proposta.

3 CASI APPLICATIVI

Nei componenti strutturali, i punti critici per la resistenza a fatica, sono spesso sulla superficie, quindi i relativi stati tensionali sono stati piani, di cui si analizzano nel seguito alcuni casi particolari.

3.1 Caso generale di flessione-torsione

Consideriamo il caso di un tensore indotto da una combinazione generica di flessione e torsione o tutti i casi assimilabili al tensore:

$$\begin{bmatrix} \sigma_x(t) & \tau_{xy}(t) & 0 \\ \tau_{xy}(t) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{s}(t) = [\sigma_x(t) \ 0 \ 0 \ \tau_{xy}(t) \ 0 \ 0] \quad (14)$$

In questo caso è di interesse solo il caso con $\theta = 90^\circ, \alpha = 0$, dato che per altri angoli le tensioni tangenziali assumono valori massimi inferiori. La $\tau_m(t)$ dipende quindi solo da φ :

$$\tau_m(t) = \frac{\sin(2\varphi)}{2} \sigma_x(t) - \cos(2\varphi) \tau_{xy}(t) \quad (15)$$

Introducendo le seguenti grandezze: $\mathbf{V}_\sigma = \mathbf{Var}(\sigma_x(t))$, $\mathbf{V}_\tau = \mathbf{Var}(\tau_{xy}(t))$, $\mathbf{C}_{\sigma\tau} = \mathbf{Cov}(\sigma_x(t), \tau_{xy}(t))$, la varianza di $\tau_m(t)$ può esprimersi come funzione di φ :

$$\begin{aligned} \mathbf{Var}(\tau_m(t)) &= f(\varphi, \mathbf{V}_\sigma, \mathbf{V}_\tau, \mathbf{C}_{\sigma,\tau}) = \\ &= \frac{\sin(2\varphi)^2}{4} \mathbf{V}_\sigma + \cos(2\varphi)^2 \mathbf{V}_\tau - \sin(2\varphi) \cos(2\varphi) \mathbf{C}_{\sigma,\tau} \end{aligned} \quad (16)$$

La direzione φ per cui la varianza è massima si ottiene dallo studio della funzione trigonometrica in φ ; i risultati sono periodici e dipendono dalla covarianza $\mathbf{C}_{\sigma\tau}$ e dalla combinazione delle varianze $(\mathbf{V}_\sigma - 4 \mathbf{V}_\tau)$. Lo schema dei risultati è riportato in Tabella 1.

Tabella 1: Valori degli angoli φ di massima varianza nel caso generico di flessione-torsione.

Direzioni critiche	$\mathbf{C}_{\sigma\tau} \neq 0$	$\mathbf{C}_{\sigma\tau} = 0$
$(\mathbf{V}_\sigma - 4 \mathbf{V}_\tau) < 0$	$\varphi_0 + i \frac{\pi}{2}$	$i \frac{\pi}{2}$
$(\mathbf{V}_\sigma - 4 \mathbf{V}_\tau) = 0$	$\frac{3\pi}{8} + i \frac{\pi}{2}$	qualsiasi φ
$(\mathbf{V}_\sigma - 4 \mathbf{V}_\tau) > 0$	$\left(\varphi_0 + \frac{\pi}{4}\right) + i \frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{4} + i \frac{\pi}{2}$
Dove:	$\varphi_0 = \frac{1}{4} \arctan\left(\frac{4 \mathbf{C}_{\sigma,\tau}}{\mathbf{V}_\sigma - 4 \mathbf{V}_\tau}\right) \quad i = 0, 1, 2, \dots$	

3.2 Flessione e torsione ad ampiezza costante

Si consideri il caso di tensione longitudinale e tangenziale (come flessione e torsione combinate) sinusoidali, con fase relativa generica δ :

$$\begin{aligned}\sigma_x(t) &= \sigma_a \sin(\omega t) \\ \tau_{xy}(t) &= \tau_a \sin(\omega t + \delta)\end{aligned}\quad (17)$$

Varianze e covarianza risultano:

$$\begin{aligned}V_\sigma &= \frac{1}{T} \int_0^T \sigma_a^2 \sin^2(\omega t) dt = \frac{\sigma_a^2}{2} \\ V_\tau &= \frac{1}{T} \int_0^T \tau_a^2 \sin^2(\omega t + \delta) dt = \frac{\tau_a^2}{2} \\ C_{\sigma\tau} &= \frac{1}{T} \int_0^T \sigma_a \tau_a \sin(\omega t) \sin(\omega t + \delta) dt = \frac{\sigma_a \tau_a \cos(\delta)}{2}\end{aligned}\quad (18)$$

Il piano di massima varianza può determinarsi in base alle precedenti equazioni (Tabella 2).

Tabella 2: Valori degli angoli φ di massima varianza nel caso di flesso-torsione sinusoidali.

Direzioni critiche	$\delta \neq \pi/2$	$\delta = \pi/2$
$(\sigma_a - 2 \tau_a) < 0$	$\varphi_0 + i \frac{\pi}{2}$	$i \frac{\pi}{2}$
$\sigma_a = 2 \tau_a$	$\frac{3\pi}{8} + i \frac{\pi}{2}$	tutti φ
$(\sigma_a - 2 \tau_a) > 0$	$\left(\varphi_0 + \frac{\pi}{4}\right) + i \frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{4} + i \frac{\pi}{2}$
Dove:	$\varphi_0 = \frac{1}{4} \arctan\left(\frac{4 \sigma_a \tau_a \cos(\delta)}{\sigma_a^2 - 4 \tau_a^2}\right)$ $i = 0, 1, 2, \dots$	

4 ESEMPI NUMERICI E CONFRONTI

4.1 Sollecitazioni periodiche

In questa sezione vengono presentati alcuni esempi per illustrare i vantaggi ed i limiti del metodo proposto. Applicando il metodo della varianza a sollecitazioni piane semplici verranno determinati l'ampiezza ed il valore medio della tensione tangenziale impiegati negli approcci di piano critico. I dati ottenuti verranno confrontati con i quelli ottenuti con i metodi

della corda proposto da Lamaitre and Chaboche [0] e della ipersfera di Papadopoulos [0] il cui impiego è da tempo consolidato.

Si consideri il percorso Ψ descritto su di un piano generico Δ dal vertice del vettore tensione tangenziale τ al trascorrere del tempo. Nel caso di una storia di carico periodica si ottiene un percorso chiuso come quello di Figura 2.

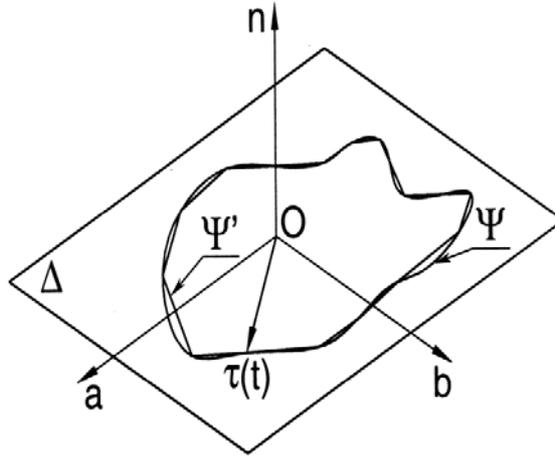


Figura 2: Percorso di carico della τ sul piano generico Δ .

Il metodo della varianza può essere implementato in maniera efficiente considerando che il tensore di covarianza per la sollecitazione tangenziale proiettata sul piano generico può venire rappresentato nella seguente forma matriciale espressa nella base di riferimento (\mathbf{a}, \mathbf{b}) :

$$C_{\tau} = \begin{bmatrix} \frac{1}{T} \int_{\tau} (\tau_a(t) - m_a)^2 dt & \frac{1}{T} \int_{\tau} (\tau_a(t) - m_a) \cdot (\tau_b(t) - m_b) dt \\ \frac{1}{T} \int_{\tau} (\tau_a(t) - m_a) \cdot (\tau_b(t) - m_b) dt & \frac{1}{T} \int_{\tau} (\tau_b(t) - m_b)^2 dt \end{bmatrix} \quad (19)$$

essendo m_a ed m_b i valori medi con i quali viene determinata la tensione tangenziale media sul piano in esame.

La diagonalizzazione della matrice permette di individuare la direzione di massima varianza. In tale direzione viene quindi determinata l'ampiezza della componente tangenziale.

Il metodo della corda ricerca la corda di lunghezza massima congiungente una coppia di punti occupati dal vertice del vettore tensione tangenziale durante l'intera storia di carico. L'ampiezza della tensione tangenziale su tale piano è data dalla semilunghezza della corda di lunghezza massima:

$$\tau_a = \frac{1}{2} \max_{t_1 \in T} \left[\max_{t_2 \in T} |\tau(t_1) - \tau(t_2)| \right]. \quad (20)$$

Il valore medio è dato dal modulo del vettore congiungente l'origine del sistema di riferimento con il punto medio della corda di lunghezza massima.

Questo metodo cade in difetto quando è possibile individuare più di una corda caratterizzata da lunghezza pari a quella di lunghezza massima perché in tal caso il valore medio non è univocamente determinato.

Il metodo della ipersfera individua la più piccola ipersfera circoscritta ad un percorso di carico rappresentato in uno spazio euclideo n -dimensionale. Nel caso in esame il metodo individua la più piccola circonferenza che contiene completamente il percorso di carico descritto dal vertice del vettore tensione tangenziale in un generico piano. Mentre il metodo precedente individua prima l'ampiezza della tensione tangenziale e poi il valore medio, questo metodo individua in primo luogo il valore medio, cioè il centro C della circonferenza e successivamente l'ampiezza corrispondente al raggio:

$$\begin{aligned}\tau_m &= \min_C \left\{ \max_T |\tau(t) - C| \right\} \\ \tau_a &= \max_T |\tau(t) - \tau_m|\end{aligned}\tag{21}$$

Il problema di ottimizzazione *minimax* descritto dalle relazioni precedenti può essere affrontato impiegando diversi algoritmi. La formulazione originale di Papadopoulos prevede l'impiego di un algoritmo incrementale [0], tuttavia nel presente lavoro verrà impiegato una routine ottimizzata basata sul metodo Sequential Quadratic Programming sviluppato da Zhou e Tits [0], implementata nel pacchetto software MatLab.

Il metodo della ipersfera permette di superare l'ambiguità riscontrata con il metodo precedente, ma questo viene pagato con una maggiore complessità di calcolo.

Ciò risulta evidente ricorrendo ad una rappresentazione discretizzata della storia di carico. Il percorso descritto dal vertice del vettore tensione tangenziale su un piano generico ha un andamento continuo, tuttavia è possibile schematizzarlo con una poligonale a tratti rettilinei i cui m vertici rappresentano gli stati di sollecitazione negli istanti di campionamento della storia di carico.

Nella pratica ingegneristica i metodi descritti sono applicati proprio alle storie di carico discretizzate. È semplice estendere la formulazione del metodo della varianza al caso in cui il percorso di carico sia costituito da un insieme discreto di m stati di sollecitazione.

In ognuno dei piani considerati il metodo della varianza richiede una unica operazione di diagonalizzazione della matrice di covarianza.

Il metodo della corda valuta n_c combinazioni di vertici per ogni piano:

$$n_c = \binom{m}{2} = \frac{m!}{2!(m-2)!}\tag{22}$$

Il metodo della ipersfera richiede invece una mole di calcoli più elevata. La formulazione incrementale richiede, per ogni piano, un numero n_I di operazioni:

$$n_I = m \cdot \left[\binom{m}{2} + \binom{m}{3} \right] = m \cdot \left[\frac{m!}{2!(m-2)!} + \frac{m!}{3!(m-3)!} \right]\tag{23}$$

Una stima del numero complessivo di operazioni da compiere per individuare la massima ampiezza della tensione tangenziale può essere ottenuta moltiplicando il numero di operazioni compiute su ogni piano per il numero di piani esaminati.

La Figura 3 illustra il numero di operazioni necessarie per investigare i piani compresi nell'intervallo:

$\theta = [0^\circ, 180^\circ]$; $\varphi = [0^\circ, 360^\circ]$ con step pari ad un grado, impiegando i metodi considerati, per diversi valori della numerosità m degli istanti di campionamento.

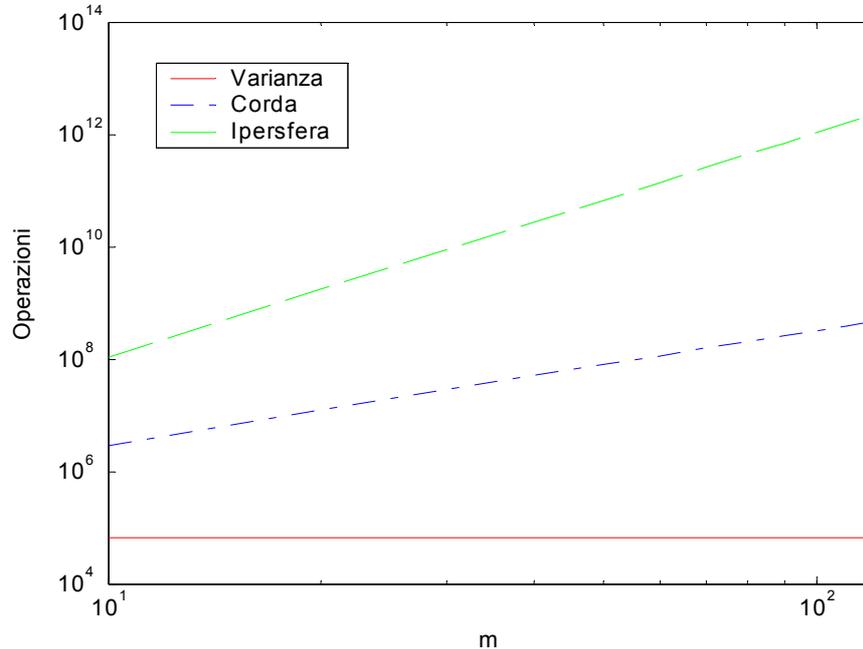


Figura 3: Operazioni necessarie per l'individuazione della direzione critica.

Considerando alcune sollecitazioni periodiche, vengono ora esaminati i percorsi di carico prodotti dal vertice del vettore tensione tangenziale su di un piano fissato Δ^* , caratterizzato da $\theta = 30^\circ$, $\varphi = 45^\circ$, seguendo la metodologia impiegata da Papadopoulos in [0].

4.2 Esempio 1

Si consideri una sollecitazione biassiale di doppia trazione con sollecitazioni caratterizzate dal medesimo valore medio e fasi in opposizione:

$$\sigma_x = \alpha f(t) + \alpha; \quad \sigma_y = \alpha f\left(t - \frac{T}{2}\right) + \alpha;$$

Il segnale $f(t)$ è assunto periodico con periodo T e triangolare, con $-1 \leq f(t) \leq 1$ ed $f(t) = f(t + T)$.

Poiché si vuole procedere alla determinazione numerica delle grandezze di piano, è stato attribuito un valore numerico al parametro α , ed è stato considerato un segnale campionato con numerosità m del campione:

$$\alpha = 100; \quad m = 720. \tag{24}$$

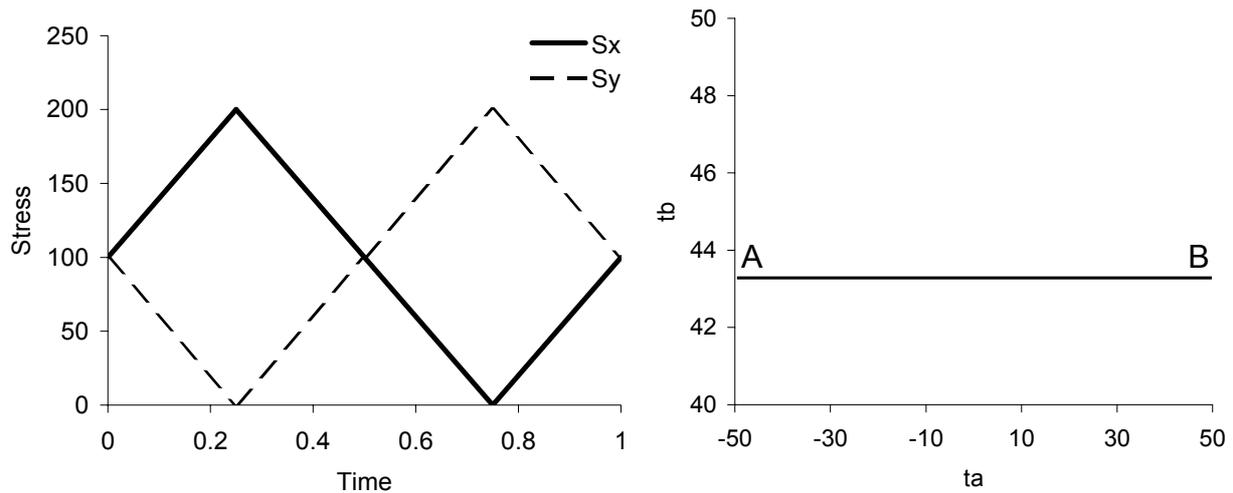


Figura 4: Storia di carico nominale e percorso di carico sul pino Δ^* (Esempio 1).

In Figura 4 sono rappresentate le storie di carico delle sollecitazioni nominali, ed il percorso di carico nel riferimento del piano Δ^* esaminato. La direzione di massima varianza coincide con la direzione del segmento AB di corda massima che è anche il diametro della più piccola circonferenza circoscritta. I metodi considerati forniscono quindi indicazioni concordi per l'ampiezza ed il valore medio della componente tangenziale come si può notare dai dati riportati in Tabella 3.

Tabella 3: Tensioni tangenziali per l'esempio 1.

	τ_a	τ_m
Varianza	50.0	43.3
Corda	50.0	43.3
Ipersfera	50.0	43.3

4.3 Esempio 2

Si consideri una sollecitazione biassiale di doppia trazione con sollecitazioni caratterizzate dal medesimo valore medio e con fasi in quadratura:

$$\sigma_x = \alpha f(t) + \alpha; \quad \sigma_y = \alpha f\left(t - \frac{T}{4}\right) + \alpha; \quad (25)$$

In Figura 5 sono rappresentate le storie di carico delle sollecitazioni nominali, ed il percorso di carico nel riferimento del piano Δ^* esaminato. Il percorso di carico sul piano Δ^* ha forma rettangolare.

I metodi della corda e della circonferenza circoscritta forniscono indicazioni concordi sia per l'ampiezza (AC), sia per il valore medio della componente tangenziale sul piano Δ^* esaminato, come si osserva dalla Tabella 4. La direzione di massima varianza (BD) non coincide con quella di massima ampiezza della componente tangenziale che in questo caso viene sottostimata.

Tabella 4: Tensioni tangenziali per l'esempio 2.

	τ_a	τ_m
Varianza	25.0	43.3
Corda	33.1	43.3
Ipersfera	33.1	43.3

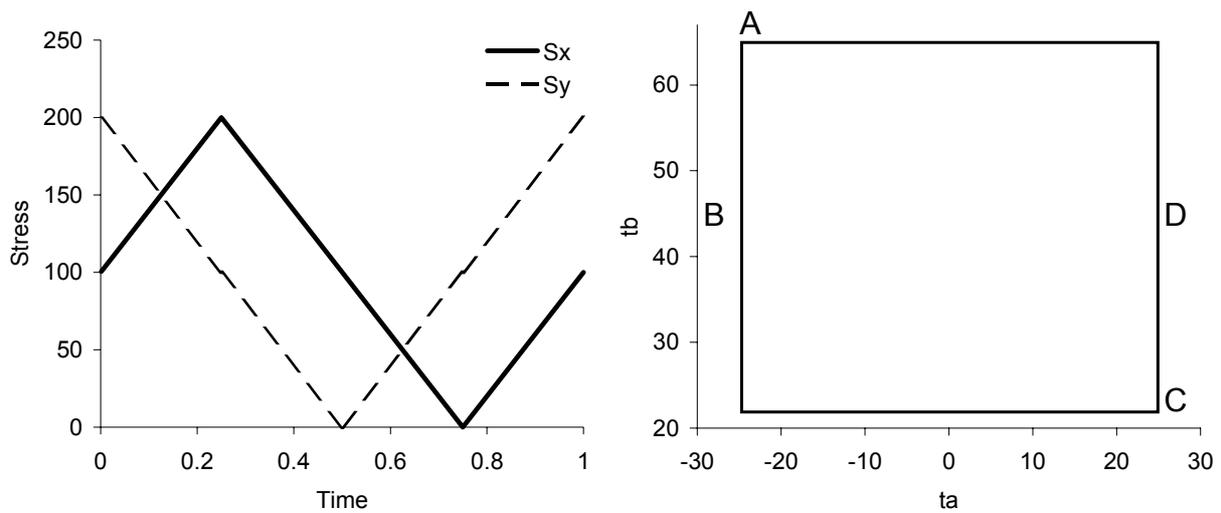


Figura 5: Storia di carico nominale e percorso di carico sul pino Δ^* (Esempio 2).

La condizione di carico esaminata mette quindi in luce un limite dell'approccio proposto: per sollecitazioni di tipo deterministico, la direzione critica individuata con il metodo della varianza potrebbe portare a sottostimare il danneggiamento. Tuttavia l'interesse per tale metodologia deriva dalla possibilità di impiego in situazioni di carico più complesse, per la stima del danneggiamento in condizioni di vita a termine.

In questo campo il metodo della circonferenza circoscritta non è applicabile. Infatti benché il metodo di Papadopoulos fornisca una indicazione univoca ed in vantaggio di sicurezza, esso è impiegabile solo per valutare lo stato di sollecitazione rispetto alla situazione di limite di fatica, non essendo in grado di considerare le caratteristiche del percorso di carico compreso nella circonferenza circoscritta. Tale metodo non verrà pertanto preso in considerazione nel seguito del lavoro.

I metodi della varianza e della corda massima individuano invece una direzione critica. Tale direzione viene associata al sistema di scorrimento cristallino sul quale deve essere valutato il danneggiamento per fatica. In questa ottica nel prossimo paragrafo verrà eseguita una stima del danneggiamento prodotto da una storia di carico biassiale ad ampiezza variabile.

4.4 Caso applicativo con segnali random

Per approfondire il confronto tra l'approccio in varianza e quello di massima ampiezza della tensione tangenziale, si considera una storia di carico complessa data dalla sollecitazione di

flessione-torsione agente sull'attacco del manubrio di una bicicletta mountain-bike che percorre tratti di sterrati con pendenze differenti.
 In Figura 6 è stata rappresentata la geometria del manubrio ed i punti di applicazione delle forze su di esso agenti.

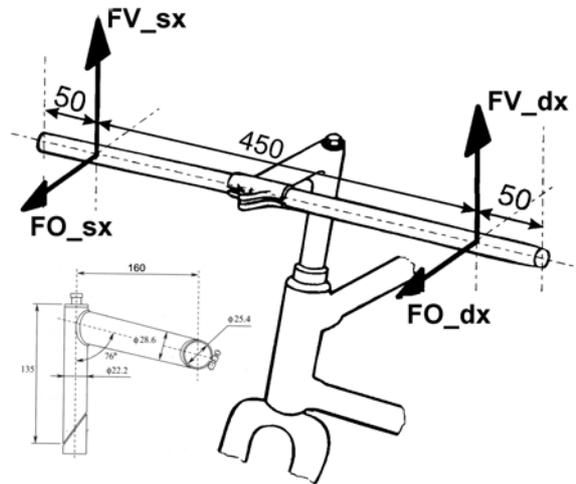


Figura 6: Geometria manubrio e punti di applicazione del carico.

Il percorso selezionato per la rilevazione [0] ha lunghezza pari a 750 m ed è interamente caratterizzato da fondo battuto e presenza di ciottoli. Presenta inizialmente una discesa con pendenza da 9% a 31% (AB). Segue un tratto in salita con pendenza da 5% a 17% (BC). Il percorso termina con un tratto in discesa con pendenza di circa 9%. L'altimetria del percorso e l'intensità delle forze applicate al manubrio sono rappresentate in Figura 7 a) e b) rispettivamente.

In Figura 7 c) e d) sono diagrammate le sollecitazioni di flessione e torsione agenti sull'attacco del manubrio e le relative tensioni di trazione e tangenziale agenti nel punto dell'attacco maggiormente sollecitato. Si osserva che in salita prevale la sollecitazione di torsione, mentre in discesa prevale la flessione. Si osserva inoltre che lo stato di sollecitazione è non stazionario e non gaussiano.

Impiegando il metodo della varianza ed il metodo della corda massima sono state individuate le direzioni critiche per la valutazione del danneggiamento a fatica. Tali direzioni corrispondono a quella di massima varianza della tensione tangenziale o di massima ampiezza della tensione tangenziale a seconda del metodo impiegato. Lungo tali direzioni è stato eseguito il conteggio dei cicli sulla tensione tangenziale impiegando il metodo di conteggio rainflow. In Tabella 5 sono riportati i dati salienti rilevati sui piani critici individuati con i due metodi.

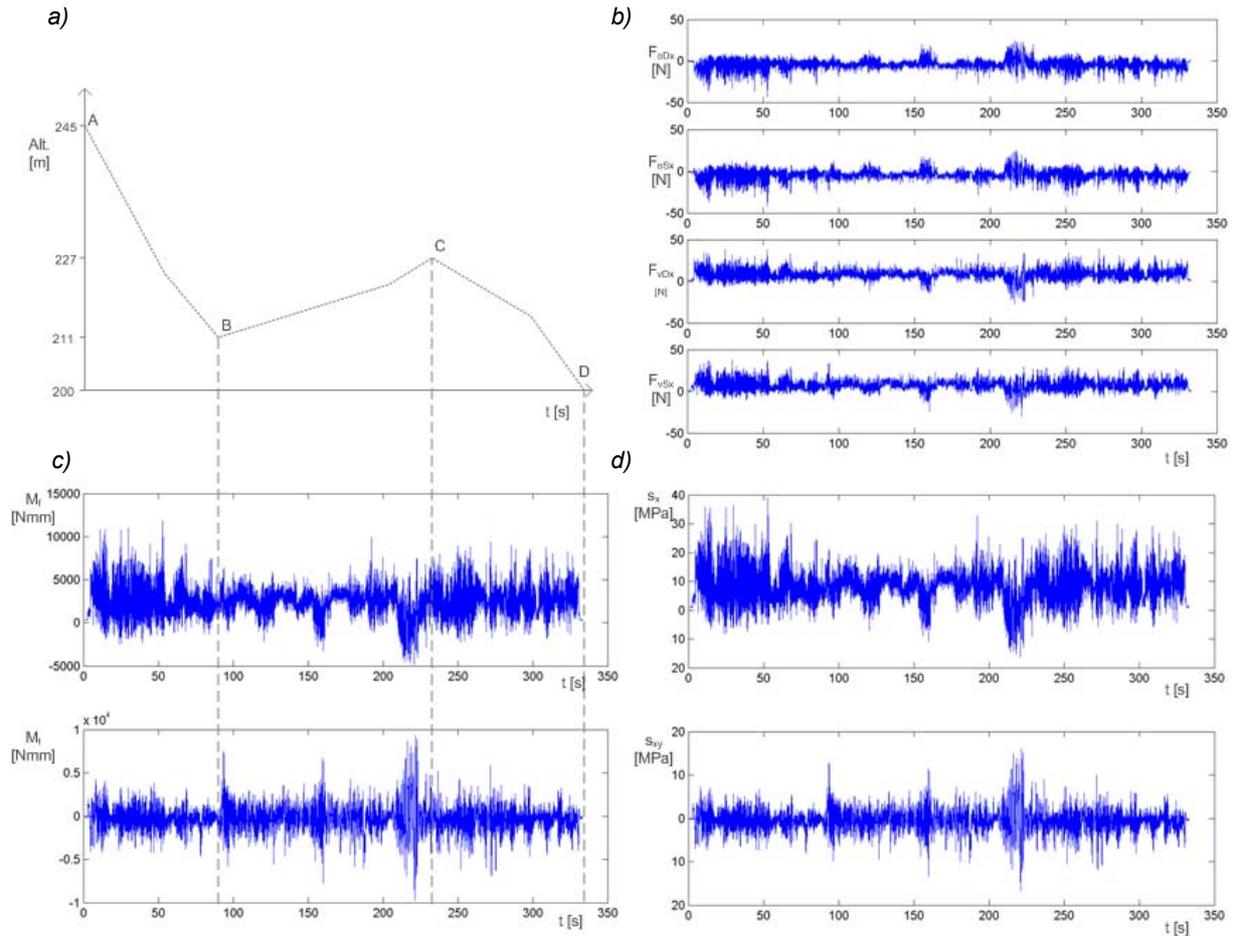


Figura 7: Altimetria del percorso a); Intensità delle forze applicate b); Sollecitazione agenti sulla piega c); Tensioni agenti nel punto critico indagato d).

In Figura 8 sono rappresentati i cumulativi di carico ottenuti con il metodo rainflow sulle direzioni critiche individuate. Nella direzione di massima ampiezza della sollecitazione tangenziale si rileva un maggior numero di cicli con ampiezza elevata, mentre lungo la direzione di massima varianza sono presenti più cicli in un range di ampiezze intermedio.

Tabella 5: Parametri individuati con i metodi della corda e della varianza.

	$\theta_{\text{crit.}}$	$\Phi_{\text{crit.}}$	$\tau_{a,\text{max}}$	$\text{Var}(\tau_a)$	Cicli Contati	Tempo Calcolo
	[°]	[°]	[MPa]	[MPa ²]	RainFlow	[s]
Varianza	45	90	26.5	6.8	4496	5.9
Corda	89	90	33.0	6.0	5037	18000

I dati ottenuti permettono di formulare alcune considerazioni sulla valutazione del danneggiamento mediante gli approcci in questione.

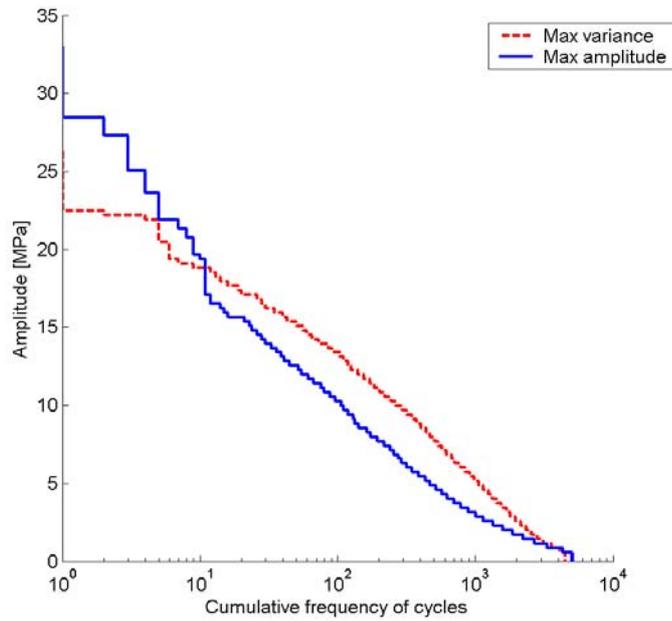


Figura 8: Cumulativi rainflow per il percorso di prova.

Lo stato dell'arte sullo studio del danneggiamento prodotto da sollecitazione multiassiali richiede una descrizione biparametrica del processo di danneggiamento valutato con l'approccio di piano critico. Tuttavia, per i fini del presente lavoro si ritiene sufficiente fornire una stima sulla base della sola componente tangenziale. Si vuole infatti proporre un confronto sull'effetto prodotto dalla modalità di individuazione del piano critico sulla valutazione del danneggiamento e non una stima compiuta del danneggiamento stesso.

Il danno prodotto da un singolo ciclo è determinato dalla relazione:

$$D_i = \left(\frac{\tau_{a,i}}{\tau_A} \right)^{k_w} \cdot \frac{1}{N_A} \quad (26)$$

Considerando un accumulo lineare del danno secondo l'ipotesi di Palmgren-Miner si ottiene la relazione per il danno cumulato:

$$D_{Tot.} = \sum_i D_i \quad (27)$$

Assumendo arbitrariamente i valori seguenti per la caratterizzazione meccanica del materiale: $k_w = 3$ oppure $k_w = 5$, e $\tau_A^{k_w} \cdot N_A = 1 [\text{MPa}]^{k_w}$, si perviene alla determinazione dei cumulativi rappresentati in Figura 9 a) e b). Il danno assume valore maggiore sul piano di massima varianza sia caratterizzando il materiale con curve di Wohler con pendenza $k_w = 3$, sia impiegando $k_w = 5$. La situazione cambia solo se si considerano curve di Wohler con pendenza $k_w > 7$.

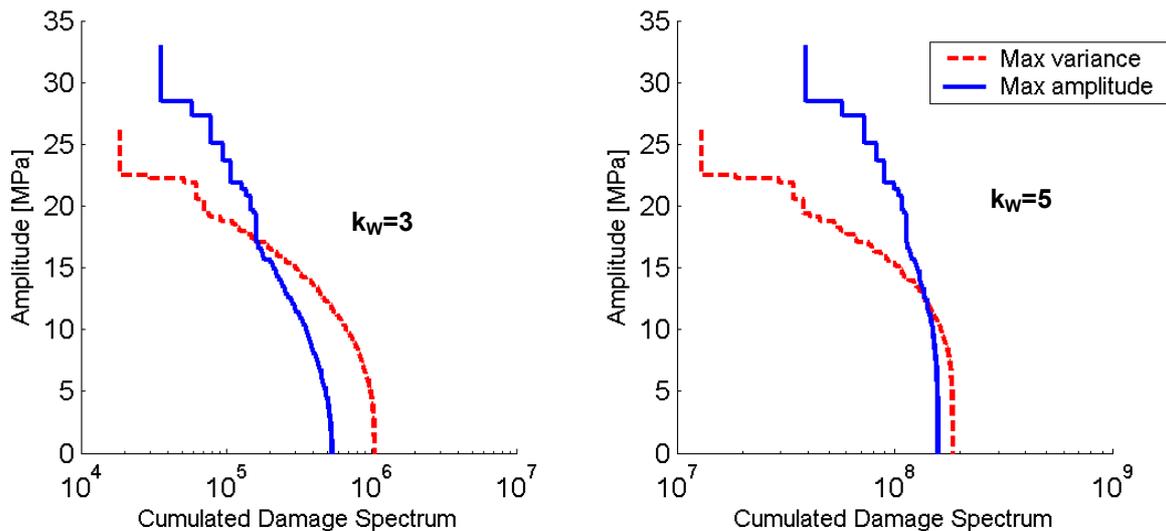


Figura 9: Cumulativi del danno per curve di Wohler aventi $k_w=3$ e $k_w=5$.

Si osserva quindi che la situazione è sostanzialmente cambiata rispetto a quella riscontrata nel caso deterministico. Infatti mediante l'approccio in varianza si perviene ora ad una valutazione del danneggiamento in vantaggio di sicurezza. Mentre un evento isolato di entità rilevante risulta determinante nell'individuazione del piano critico mediante il metodo della corda massima, lo stesso evento condiziona in misura minore il metodo della varianza poiché dipende anche dalla numerosità con cui un evento si presenta.

5 CONCLUSIONI

Molti criteri esistenti di previsione della resistenza a fatica in presenza di sollecitazioni multiassiali si basano sull'identificazione di un opportuno parametro tensionale (tensione tangenziale) e sulla determinazione del piano e della direzione "critica", dove tale parametro raggiunge la massima ampiezza.

L'impiego di tali metodi per la determinazione delle condizioni critiche presenta alcune limitazioni. In primo luogo, i metodi esistenti non forniscono alcuna soluzione analitica, ma si basano su procedure numeriche, caratterizzate spesso da lunghi tempi di calcolo nel caso di storie di carico reali.

In secondo luogo, con sollecitazioni ad ampiezza variabile può essere discutibile l'identificare la direzione critica sulla base della sola massima ampiezza della tensione tangenziale.

In questa ottica, la presente memoria propone un nuovo criterio di indagine che identifica le direzioni di massimo danneggiamento sulla base della varianza del segnale analizzato. Il metodo proposto studia la varianza dei segnali ed è applicabile a tutti i criteri di resistenza potendo investigare sia le tensioni tangenziali in un tensore delle tensioni, sia spazi vettoriali multi-dimensionali, come nel criterio di Crossland. Sono presentate le soluzioni analitiche per il caso semplice di flessione-torsione.

Per gli esempi semplici, il confronto sistematico ha evidenziato che l'approccio in varianza, confrontato con altri metodi, non presenta vantaggi sostanziali, se non in termini di tempi di calcolo. In alcuni casi può addirittura fornire stime del danno a sfavore di sicurezza.

Al contrario, nel caso di sollecitazioni random l'approccio in varianza fornisce stime del danneggiamento cautelative, rispetto al metodo della corda con vantaggi considerevoli nei tempi di calcolo.

In conclusione, dall'analisi complessiva dei risultati presentati si evidenzia come il metodo proposto possa in futuro porsi come una promettente alternativa nell'ambito della progettazione a fatica multiassiale.

Bibliografia

- [1] Susmel L., Lazzarin P. (2002) A bi-parametric Wohler curve for high cycle multiaxial fatigue assessment. *Fatigue Fract Engng Mater Struct* **25**, 63-78.
- [2] Carpinteri A. Spagnoli A. (2001) Multiaxial high-cycle fatigue criterion for hard metals. *Int. J. Fatigue* **23**, 135-145.
- [3] Papadopoulos I. V., Davoli P., Gorla C., Filippini M., Bernasconi A. (1997) A comparative study of multiaxial high-cycle fatigue criteria for metals. *Int. J. Fatigue* **19**, 219-235.
- [4] Bannantine J.A. (1989) A variable Amplitude Multiaxial Fatigue Life Prediction Method. PhD Thesis, College of Engineering University of Illinois at Urbana- Champaign A.B.
- [5] Wang C.B. Brown M.W. (1993) A path-independent parameter for fatigue under proportional and non-proportional loading. *Fatigue Fract. Engng Mater. Struct.* **16**, 1285-1298.
- [6] Carpinteri A. Spagnoli A. Vantadori S. (2003) A multiaxial fatigue criterion for random loading. *Fatigue Fract. Engng Mater Struct* **26**, 515-522.
- [7] Łagoda T., Macha E. , Dragon A., Petit J. (1996) Influence of correlation between stresses on calculated fatigue life of machine elements. *Int. J. Fatigue* **8**, 547-555.
- [8] Benasciutti D. ,Tovo R. (2005) Spectral methods for lifetime prediction under wide-band stationary random processes. In stampa su *Int J Fatigue*.
- [9] Lamaitre J., Chaboche J.L. (1990) *Mechanics of Solid Materials*, Cambridge University Press, Cambridge.
- [10] Papadopoulos I.V. (1998) Critical plane approaches in high cycle fatigue: on the definition of the amplitude and mean value of the shear stress acting on the critical plane. *Fatigue Fract. Engng Mater Struct* **21**, 269-285.
- [11] Barnasconi A., Papadopoulos I.V. (2002) Calcolo dell'ampiezza dello sforzo di taglio sotto carichi periodici non proporzionali, XXXI convegno Nazionale AIAS, Parma, Settembre 2002.
- [12] Tessari A. (1995) Sicurezza e variabilità delle condizioni di utilizzo di bidiclette mountain bike. Tesi di laurea, Università degli Studi di Padova, Dipartimento di Ingegneria Meccanica, 1995.