

# COMPORTAMENTO A FATICA DEI GIUNTI SALDATI IN FUNZIONE DELLA DENSITÀ DI ENERGIA DI DEFORMAZIONE LOCALE: INFLUENZA DEI CAMPI DI TENSIONE SINGOLARI E NON SINGOLARI

*Paolo Lazzarin*

Università di Padova, Dipartimento di Tecnica e Gestione dei sistemi industriali  
Stradella San Nicola 3, 36100 Vicenza, Italy  
(E-mail: plazzarin@gest.unipd.it)

**Sommario.** Il criterio della densità di energia di deformazione (SED) considera un preciso volume di controllo posizionato in corrispondenza del piede o della radice dei cordoni di saldatura, ossia delle zone di possibile innesco delle cricche di fatica. Modellati i cordoni come intagli a V non raccordati e con diverso angolo di apertura, il volume è riconducibile a un settore circolare nei casi di tensione o deformazione piana.

Il valore medio della densità di energia di deformazione dipende essenzialmente dalle distribuzioni singolari nei giunti di medio ed elevato spessore, mentre importante diventa il contributo della T-stress nei giunti di spessore ridotto. Entrambi gli effetti sono correttamente computati utilizzando modelli agli elementi finiti, anche utilizzando *mesh* con un numero ridotto di gradi di libertà. Il fatto è di notevole interesse per una possibile applicazione del metodo a strutture saldate di geometria complessa. Agli effetti descritti, tipicamente riconducibili a una modellazione piana, si possono accompagnare campi singolari non convenzionali, legati a effetti tridimensionali indotti dalla geometria.

**Parole chiave:** Giunti saldati, resistenza a fatica, fattori di intensificazione delle tensioni, densità di energia di deformazione.

**Keywords:** Welded joints, fatigue strength, notch stress intensity factors, strain energy density.

## 1. INTRODUZIONE

Le verifiche a fatica delle unioni saldate possono essere condotte con criteri diversi, basati sulle tensioni nominali, sulle tensioni strutturali o di *'hot-spot'*, sulla Meccanica della Frattura lineare elastica [1]. Come criterio locale, le raccomandazioni dell'International Welding Institute e quelle dell'Ente FKM prevedono l'utilizzo del criterio di Radaj [2] che vede la resistenza a fatica ad alto numero di cicli di giunti saldati di diversa geometria correlata alle *'effective notch stresses'*, calcolate in corrispondenza di un raggio di raccordo fittizio  $\rho_f = 1.0$  mm al piede e alla radice dei cordoni di saldatura. Il valore di tale raggio, valido per i comuni acciai da costruzione, è stato determinato da Radaj utilizzando l'espressione di Neuber  $\rho_f = \rho + s \rho^*$ . Stime basate su un raggio di raccordo reale  $\rho = 0$  e su una lunghezza microstrutturale  $\rho^* = 0.4$  mm (per *'cast iron'*), in combinazione con un fattore di multiassialità costante  $s = 2.5$ , si sono dimostrate realistiche per giunti comuni saldati in acciaio strutturale [1,2]. Valori sensibilmente inferiori di  $\rho^*$  sono stati suggeriti per giunti di spessore ridotto saldati a punti o al laser [1].

Fra le metodologie più recenti per la valutazione di resistenza a fatica delle unioni saldate [1,3] vi è il criterio basato sui fattori generalizzati di intensificazione delle tensioni (*'Notch stress intensity*

*factors*’, o NSIFs), così come formalizzato da Lazzarin e Tovo [4]. Il cordone di saldatura viene modellato come un intaglio a V non raccordato (*‘pointed V-notch’*,  $\rho = 0$ ) e le distribuzioni locali di tensione nelle sezioni piane trasversali sono date in funzione dei fattori generalizzati di intensificazione delle tensioni di Modo I e di Modo II,  $K_1$  and  $K_2$ . L’assunzione del raggio di raccordo nullo al piede dei cordoni e il legame tra vita a fatica e distribuzione asintotica determinata direttamente dai modelli FEM era già presente in due lavori di Atzori pubblicati diversi anni prima [5,6]. I fattori  $K_1$  e  $K_2$  esprimono l’intensità delle distribuzioni di tensione asintotiche in accordo con la soluzione teorica ottenuta da Williams, valida nell’ipotesi di tensione o deformazione piana [7]. Nei casi in cui si possa assumere in corrispondenza del piede dei cordoni di saldatura un angolo di 135 gradi, che è certamente il valore più comune nei giunti a cordone d’angolo, solo il contributo di Modo I è singolare mentre quello di Modo II non lo è (si ricorda infatti che il contributo di Modo II è singolare solo per angoli di apertura inferiori a  $102.6^\circ$ ). In questi casi è quindi possibile operare una semplificazione e usare direttamente il range del fattore di Modo I,  $\Delta K_1$ , per sintetizzare la resistenza a fatica di giunti a cordone d’angolo aventi differenti geometrie [4,8]. Una curva in termini di  $\Delta K_1-N$  è possibile non solo nella fatica ad alto numero di cicli ( $N \geq 2 \times 10^6$ ), ma anche nella vita a termine, e questo perché una larga percentuale della vita di propagazione della cricca di fatica è spesa in propagazione di una cricca corta nella zona governata dalla singolarità dell’intaglio a V non raccordato [8].

Il problema del criterio basato sui fattori di intensificazione delle tensioni è che una variazione dell’angolo presente al piede dei cordoni di saldatura impedisce un confronto diretto in termini di NSIF. Ciò vale ovviamente anche per la radice del cordone di saldatura dove la zona di mancata penetrazione definisce una fessura con angolo di apertura nullo e il fattore  $K_1$  torna ad avere le dimensioni dei più convenzionali fattori di intensificazione delle tensioni (SIF) della Meccanica della Frattura Lineare Elastica, ossia  $\text{MPa}\sqrt{\text{m}}$ . Un confronto fra geometrie con angoli di apertura diversi può essere ristabilito utilizzando l’energia di deformazione mediata su un volume di controllo centrato sull’apice dell’intaglio a V che modella il piede o la radice dei cordoni di saldatura [9-12]. Nei casi piani il volume di controllo diventa un settore circolare di raggio  $R_0$ , così come rappresentato in Fig.1. Ovviamente, la densità di energia di deformazione è esprimibile in forma chiusa sulla base dei fattori  $K_1$  e  $K_2$  che caratterizzano la geometria del giunto e il tipo di sollecitazione, almeno nei casi in cui le distribuzioni di tensione siano strettamente legate ai soli termini aventi il massimo grado di singolarità. A parità di geometria locale e globale, i fattori cambiano in un caso di flessione pura rispetto a un caso di trazione pura [13]. In relazione al valore del raggio di controllo  $R_0$ , questo è stato determinato riesaminando statisticamente centinaia di dati sperimentali relativi a giunti ottenuti con i più comuni procedimenti di saldatura ad arco. Per i giunti saldati in acciaio da costruzione si ha un raggio di controllo  $R_0=0.28$  mm, che scende a  $R_0=0.12$  mm nel caso di giunti in lega leggera [11,12].

L’utilizzo del valore medio della densità di energia di deformazione in combinazione con un’ipotesi di deformazione piana, giustifica appieno l’utilizzo di un criterio lineare elastico anche nella fatica a medio termine. E’ stato infatti dimostrato [10] come sia possibile estendere a un volume finito che abbraccia l’apice di un intaglio a V non raccordato il criterio di Glinka e Moski [14] inizialmente formulato come criterio di punto valido solo per l’apice di un intaglio raccordato: l’energia di deformazione nel volume di controllo non cambia in condizioni di snervamento localizzato (*‘small scale yielding’*) rispetto al caso idealmente lineare elastico. La condizione di snervamento localizzato viene abbandonata molto prima in presenza di sollecitazione di modo III di quanto non avvenga in presenza di sollecitazione nel piano, e questo può giustificare le diverse pendenze suggerite dalla Normative in vigore per i giunti sollecitati a trazione e a torsione [15].

Un riesame e un confronto tra il criterio di Radaj (*‘notch rounding approach’*) e il criterio basato sulla densità di energia di deformazione, *‘SED approach’*, sono attualmente in corso [16,17] e la collaborazione con il prof Dieter Radaj è estesa anche a questioni teoriche legate alla variabilità del parametro di multiassialità  $s$  [18].

Nel criterio basato sulla densità di energia di deformazione gioca un ruolo fondamentale il valore del raggio del volume strutturale. Il valore di  $R_0$  per gli acciai strutturali saldati è stato ottenuto nelle referenze [11,12] usando in combinazione due valori medi sperimentali relativi a  $5 \times 10^6$  cicli e un rapporto nominale di ciclo  $R=0$ ;

- 1 il valore  $\Delta K_I = 211 \text{ MPa}(\text{mm})^{0.326}$  per giunti a croce con angolo di apertura  $2\alpha = 135^\circ$  al piede dei cordoni; il range in questione rappresenta un valore medio ottenuto da giunti sollecitati con un rapporto nominale di ciclo  $R=0$ ;
- 2 un range di tensione nominale  $\Delta\sigma_A = 155 \text{ MPa}$  ( $R=0$ ,  $P_f=50\%$ ) relativo a giunti saldati testa a testa con cordone rasato (vari acciai da costruzione).

Una sintesi estesa a oltre 900 dati sperimentali, principalmente tratti da giunti a croce con cordone d'angolo portante e non portante) e rotture finali innescate sia al piede sia alla radice dei cordoni è mostrata in Fig. 3 [19]. La figura mostra anche la banda di dispersione, così come suggerita in [11] su una base iniziale di circa 300 dati sperimentali. In tutti i casi qui considerati, il piede dei cordoni è modellato come un intaglio a V non raccordato,  $\rho = 0$ , che diventa semplicemente una cricca nel caso della radice dei cordoni. Fanno eccezione solo alcune serie di giunti saldati testa a testa, per i quali le referenze originali documentavano un raggio di raccordo minimo al piede dei cordoni sensibilmente diverso da zero [20].

La Fig. 3 evidenzia come l'indice di dispersione  $T_w$ , relativo a due diverse probabilità di sopravvivenza,  $P_S=2.3\%$  e  $P_S=97.7\%$ , sia pari a 3.3. Comunque, l'indice di dispersione diventa 1.50 se riconvertito in termini di range della tensione locale e alle probabilità di sopravvivenza  $P_S=10\%$  e  $P_S=90\%$ , in perfetto accordo con la banda  $S-N$  normalizzata di Haibach [21].

Nel caso invece di giunti in lega leggera, il raggio del volume di controllo diminuisce ( $R_0=0.12 \text{ mm}$ ) mentre aumenta la pendenza inversa  $k$  della banda di dispersione ( $k=2.0$  contro  $k=1.5$  dei giunti saldati in acciaio). È interessante notare come, riaggiornando il raggio  $R_0$ , il valore medio della densità di energia di deformazione resti praticamente invariato rispetto a quello dei giunti saldati in acciaio [12].

Una valutazione accurata degli NSIF richiede modelli agli elementi finiti con maglia molto fine in modo da poter seguire i forti gradienti di tensione presenti nelle zone prossime ai punti di singolarità; al contrario, il valore medio della densità di energia di deformazione sul volume di controllo può essere determinato accuratamente anche utilizzando modelli a maglia larga [15,22,23]. Questo fatto può giocare un ruolo essenziale per l'applicabilità del metodo SED ai componenti di geometria complessa.

Nel presente contributo, dopo un breve inquadramento analitico del metodo basato sulla densità di energia di deformazione e la presentazione di alcuni esempi applicativi, saranno illustrati alcuni temi aperti, oggetto di analisi ancora in corso. In particolare saranno prese sinteticamente in esame:

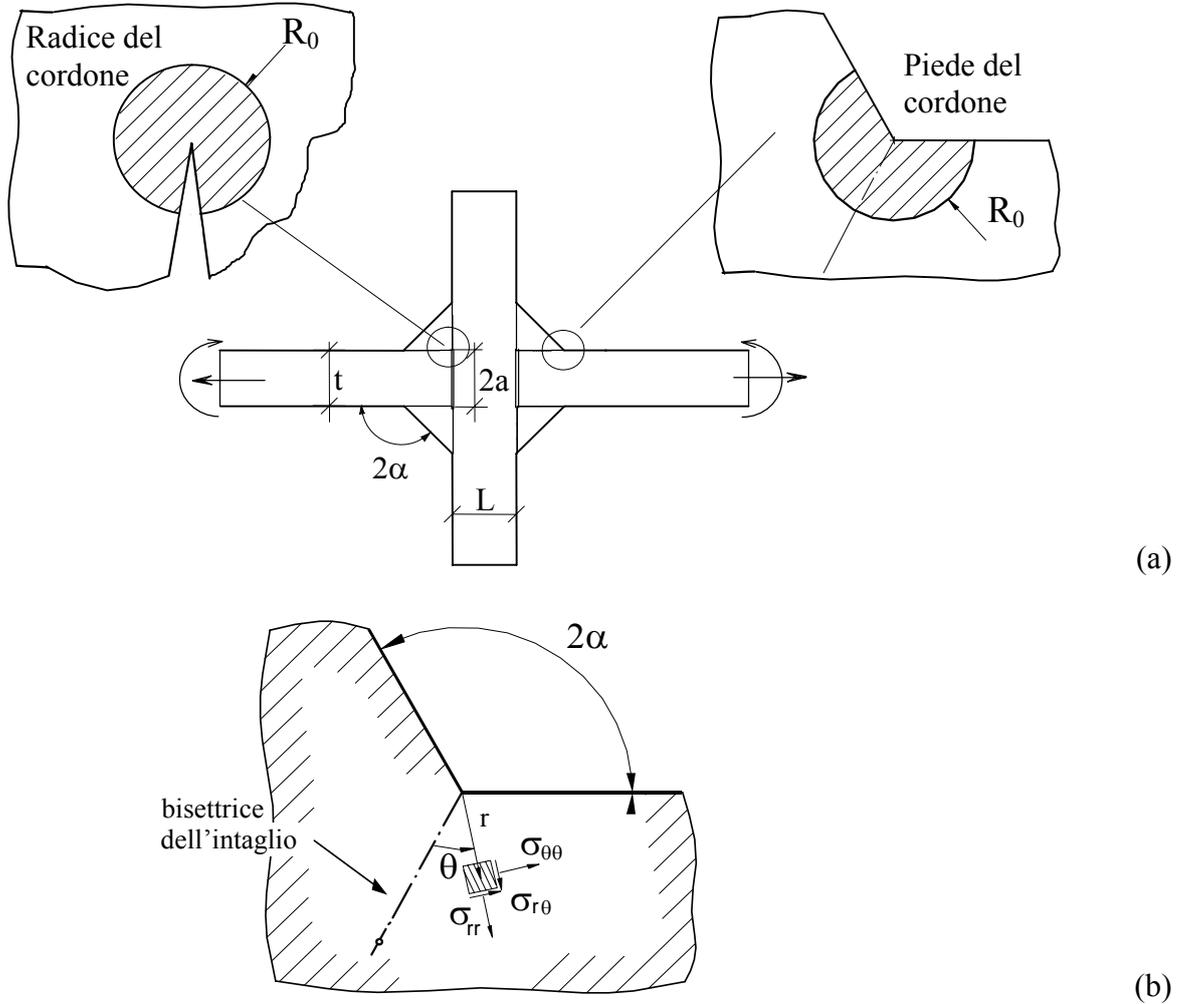
- il problema delle singolarità 'out-of-plane' indotte da effetti tridimensionali;
- la possibile estensione del criterio SED ai giunti di spessore ridotto, a cordone continuo e punti;
- i legami presenti tra SED,  $J$ -integral e fattore teorico di concentrazione delle tensioni, quest'ultimo valutato mediante analisi FEM che vedono la radice dei cordoni modellata con un keyhole avente raggio all'apice  $\rho_s=0.05 \text{ mm}$ .

## 2. INQUADRAMENTO ANALITICO DEL CRITERIO SED ED ESEMPI APPLICATIVI

Il grado di singolarità dei campi di tensione indotti da intagli a V a spigolo vivo fu analizzato per la prima volta da Williams [7] con riferimento a casi piani in presenza di sollecitazioni di Modo I e Modo II. Quando il raggio di raccordo  $\rho$  è posto pari a zero, gli NSIF quantificano l'intensità delle distribuzioni asintotiche presenti vicino all'apice dell'intaglio a V (punto di singolarità). Usando un

sistema di coordinate polari  $(r, \theta)$  avente l'origine centrata sull'apice dell'intaglio a V (come già evidenziato in Fig. 1), i fattori generalizzati di intensificazione delle tensioni di Modo I e Modo II possono essere definiti, in accordo con Gross e Mendelson [24], nella forma seguente:

$$K_1 = \sqrt{2\pi} \lim_{r \rightarrow 0^+} r^{1-\lambda_1} \sigma_{\theta\theta}(r, \theta = 0) \qquad K_2 = \sqrt{2\pi} \lim_{r \rightarrow 0^+} r^{1-\lambda_2} \tau_{r\theta}(r, \theta = 0) \qquad (1)$$

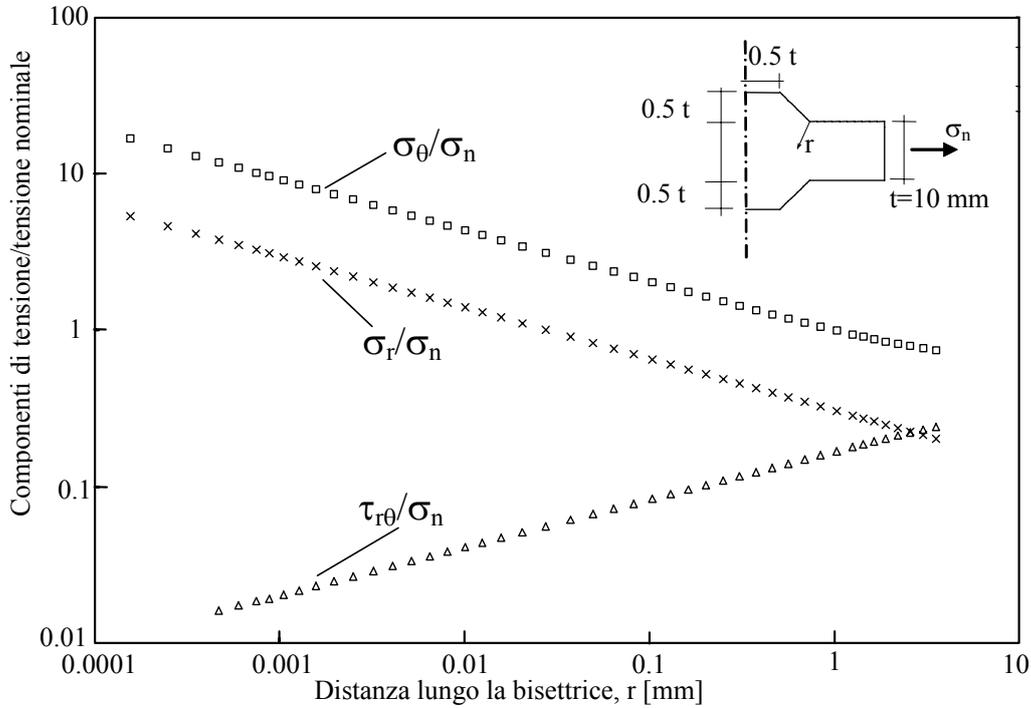


**Fig. 1.** Volume (area) di controllo posizionato al piede e alla radice dei cordoni di saldatura (a); sistema di coordinate polari e componenti di tensione (b).

Lungo la bisettrice dell'intaglio ( $\theta=0$ ), le componenti di tensione  $\sigma_{\theta\theta}$  e  $\sigma_{rr}$  sono disaccoppiate dalla componente  $\tau_{r\theta}$ : le prime due dipendono dal campo di tensione di modo I, la terza da quello di modo II. La Fig. 2 mostra l'andamento delle tensioni lungo la bisettrice dell'intaglio laterale a V con angolo di apertura di 135 gradi. Per una distanza dall'apice dell'intaglio superiore a un decimo dello spessore, le tensioni seguono una variazione lineare in un diagramma con scale doppie logaritmiche. Le tensioni  $\sigma_{\theta\theta}$  e  $\sigma_{rr}$  hanno un grado di singolarità che coincide esattamente con quello teorico previsto dalla soluzione di Williams ( $\lambda_1 - 1 = -0.326$ ). La componente  $\tau_{r\theta}$  è invece non singolare, e la pendenza, in accordo con la soluzione teorica, vale  $(\lambda_2 - 1) = +0.302$ .

Determinati i fattori  $K_1$  e  $K_2$  utilizzando le relazioni (1), tutte le tensioni presenti in un generico punto appartenente alla zona governata dalla singolarità possono essere espresse in funzione di  $K_1$  e

$K_2$ . In campo lineare elastico tensioni e deformazioni sono, come ben noto, legate fra loro dalle equazioni di Lamé'. E' quindi possibile esprimere la densità di energia di deformazione in qualunque punto prossimo al vertice dell'intaglio e mediare poi la densità di energia nel volume di controllo posto al piede o alla radice dei cordoni di saldatura, come già evidenziato in Fig. 1.



**Fig. 2:** Componenti di tensione di modo I e di modo II lungo la bisettrice dell'intaglio [4]

In sintesi, considerando condizioni di deformazione piana, la densità di energia di deformazione mediata nel settore circolare di raggio  $R_0$  vale [9]:

$$\Delta \bar{W} = \frac{e_1}{E} \left[ \frac{\Delta K_1}{R_0^{1-\lambda_1}} \right]^2 + \frac{e_2}{E} \left[ \frac{\Delta K_2}{R_0^{1-\lambda_2}} \right]^2 \quad (2)$$

I parametri  $e_1$  ed  $e_2$  dipendono dall'angolo di apertura dell'intaglio  $2\alpha$ , dall'ipotesi di rottura e dal rapporto di Poisson  $\nu$  del materiale [9,25]. Per alcuni angoli, la Tabella 1 riporta i valori dei parametri nella relazione (2). Con  $\nu=0.3$ ,  $e_1$  vale 0.117 quando  $2\alpha=135^\circ$  e 0.133 quando  $2\alpha=0$ . Nel secondo caso, che tipicamente rappresenta quanto avviene alla radice dei cordoni di saldatura, anche la distribuzione di modo II è singolare.

Il raggio di controllo mostrato in Fig. 3 è stato valutato usando la seguente relazione [9,11,12]:

$$R_0 = \left( \sqrt{2e_1} \times \frac{\Delta K_{1A}}{\Delta \sigma_A} \right)^{\frac{1}{1-\lambda_1}} = \left( \sqrt{2 \times 0.117} \times \frac{211}{155} \right)^{\frac{1}{1-0.674}} = 0.28 \text{ mm} \quad (3)$$

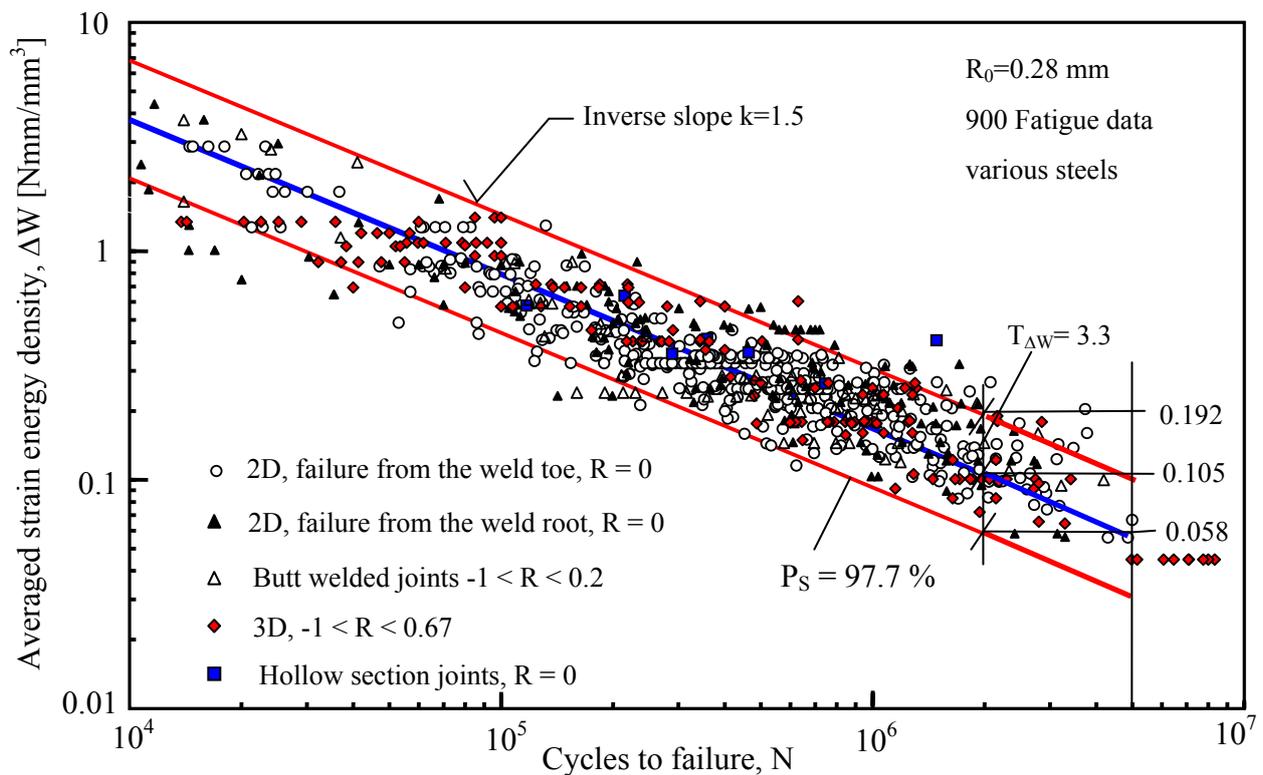
dove i parametri di resistenza a fatica  $\Delta \sigma_A$  e  $\Delta K_{1A}$  ( $P_f=50\%$ ) validi a  $N_A=5 \times 10^6$  cicli a rottura sono stati ricavati sulla base di un ampio numero di dati sperimentali riportati in letteratura.

**Tabella 1.** Valori dei parametri presenti nell'equazione (2);  $e_1$  ed  $e_2$  ottenuti in ipotesi di deformazione piana utilizzando l'ipotesi di Beltrami (criterio della densità di energia di deformazione totale) e un rapporto di Poisson  $\nu=0.3$ .

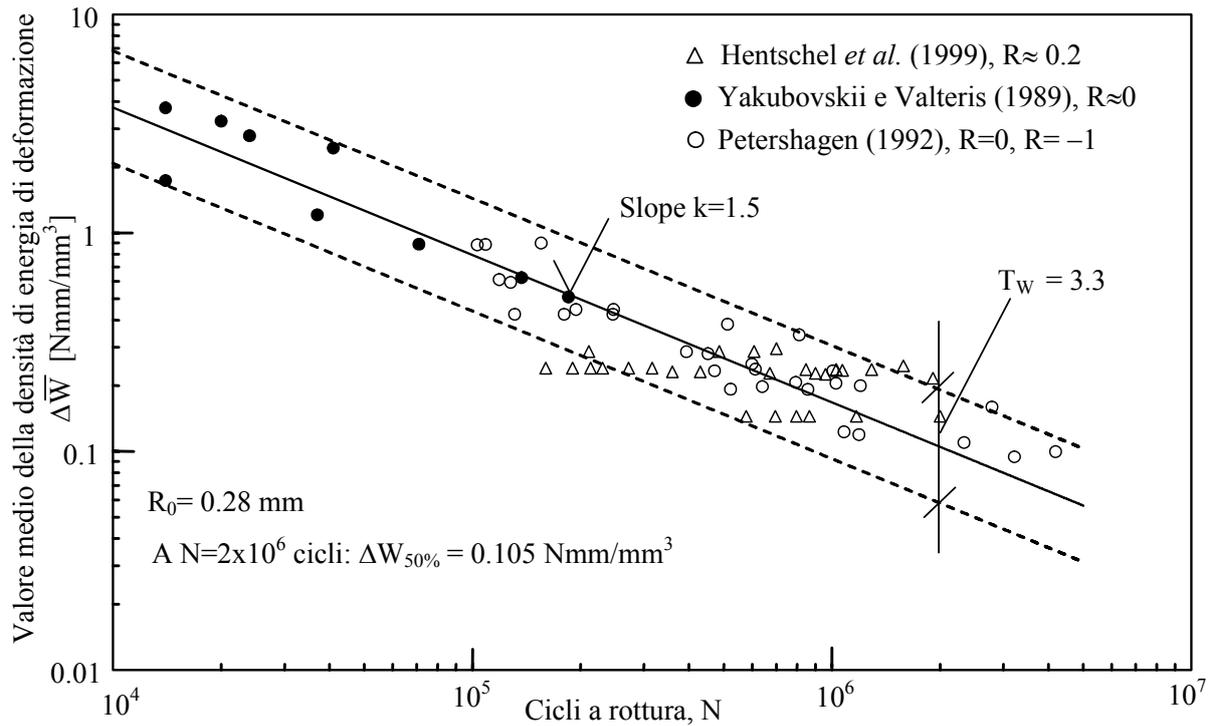
$2\alpha$ [rad]	$\lambda_1$	$\lambda_2$	$e_1$	$e_2$
0	0.5000	0.5000	0.134	0.341
$\pi/2$	0.5445	0.9085	0.146	0.168
$2\pi/3$	0.6157	1.1489	0.130	0.129
$3\pi/4$	0.6736	1.3021	0.117	0.112

Al ridursi delle dimensioni assolute dei giunti, il contributo dei termini non singolari (in particolare della  $T$ -stress, si pensi ai giunti a semplice sovrapposizione) non può essere trascurata e l'espressione (2) deve essere sostituita da una formulazione più complessa che include il contributo della  $T$ -stress [26] ed eventualmente quello di altri termini non singolari. Il problema sarà affrontato e chiarito nel seguito, con riferimento ai giunti a sovrapposizione di spessore ridotto ( $t=1$  mm).

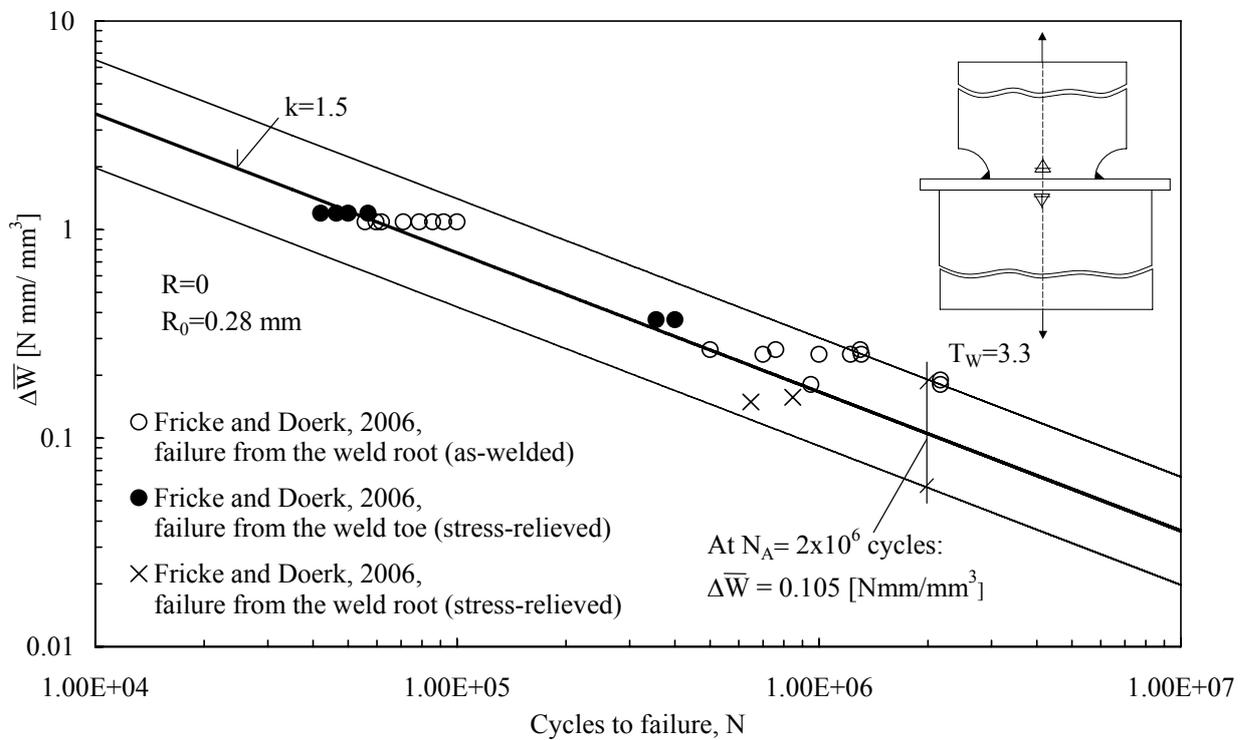
Le figure 4-8 mostrano l'applicazione del criterio basato sulla densità di energia di deformazione. Sono presi in esame dati tratti dalla letteratura, riferiti a geometrie di giunti saldati assai diverse fra loro. Noti i carichi applicati e il numero di cicli a rottura, il valore medio della SED è stato determinato mediante modelli FEM piani o tridimensionali. In tutti i casi considerati si ha un ottimo accordo tra i dati sperimentali e la banda di dispersione suggerita in [11].



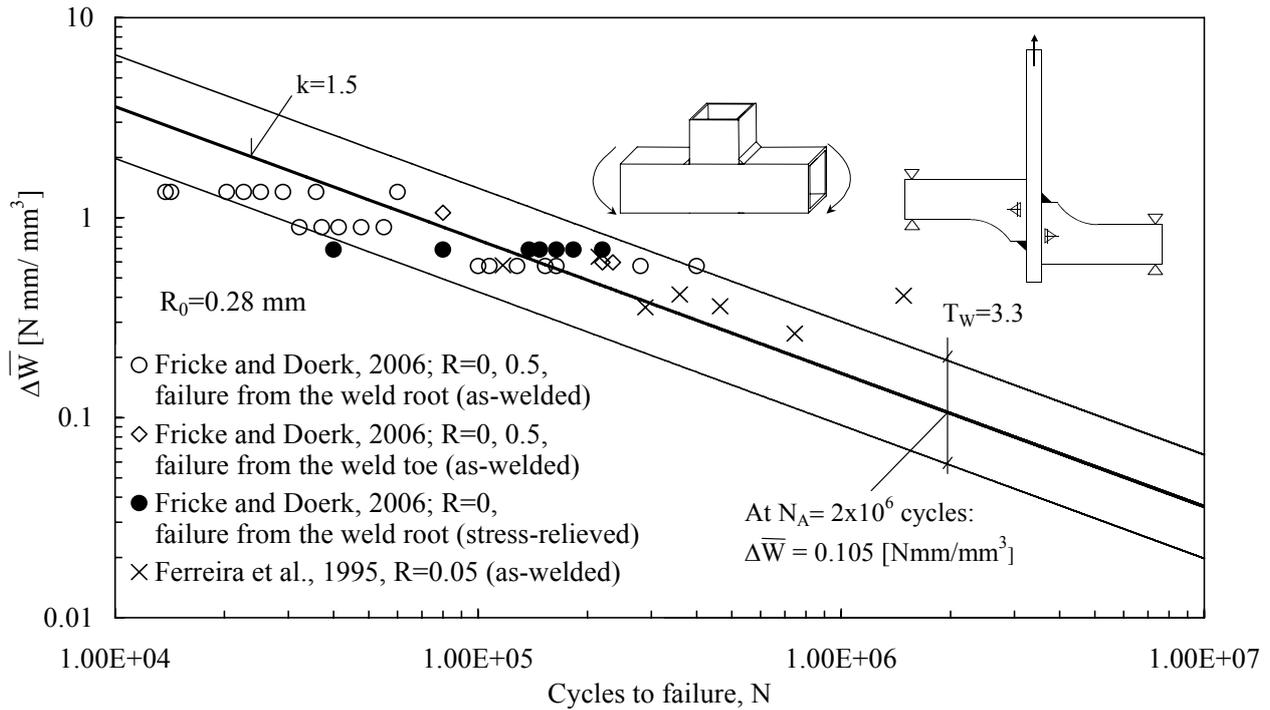
**Fig. 3:** Resistenza a fatica di giunti saldati in acciaio in funzione del valore medio della densità di energia di deformazione [19]; banda di dispersione definita da valore medio  $\pm 2$  deviazioni standard [11]; piatti principali di spessore  $t$  variabile tra 6 e 100 mm; piatti trasversali di spessore variabile tra 3 e 220 mm; rotture innescate in corrispondenza del piede o della radice dei cordoni di saldatura; per le geometrie, i materiali e le tecnologie si vedano le referenze [12,20, 22, 25].



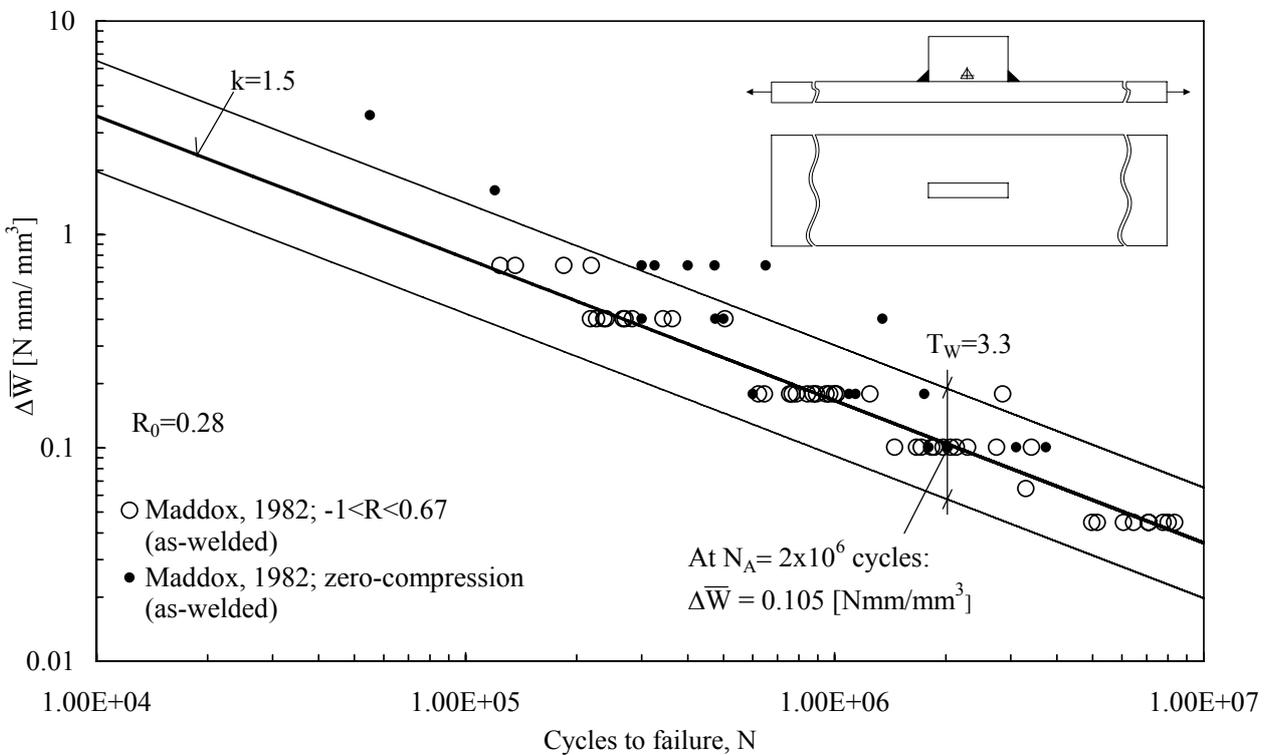
**Fig. 4:** Resistenza a fatica di giunti saldati testa a testa in funzione del valore medio della densità di energia di deformazione [20]; confronto con la banda di dispersione riportata in [11].



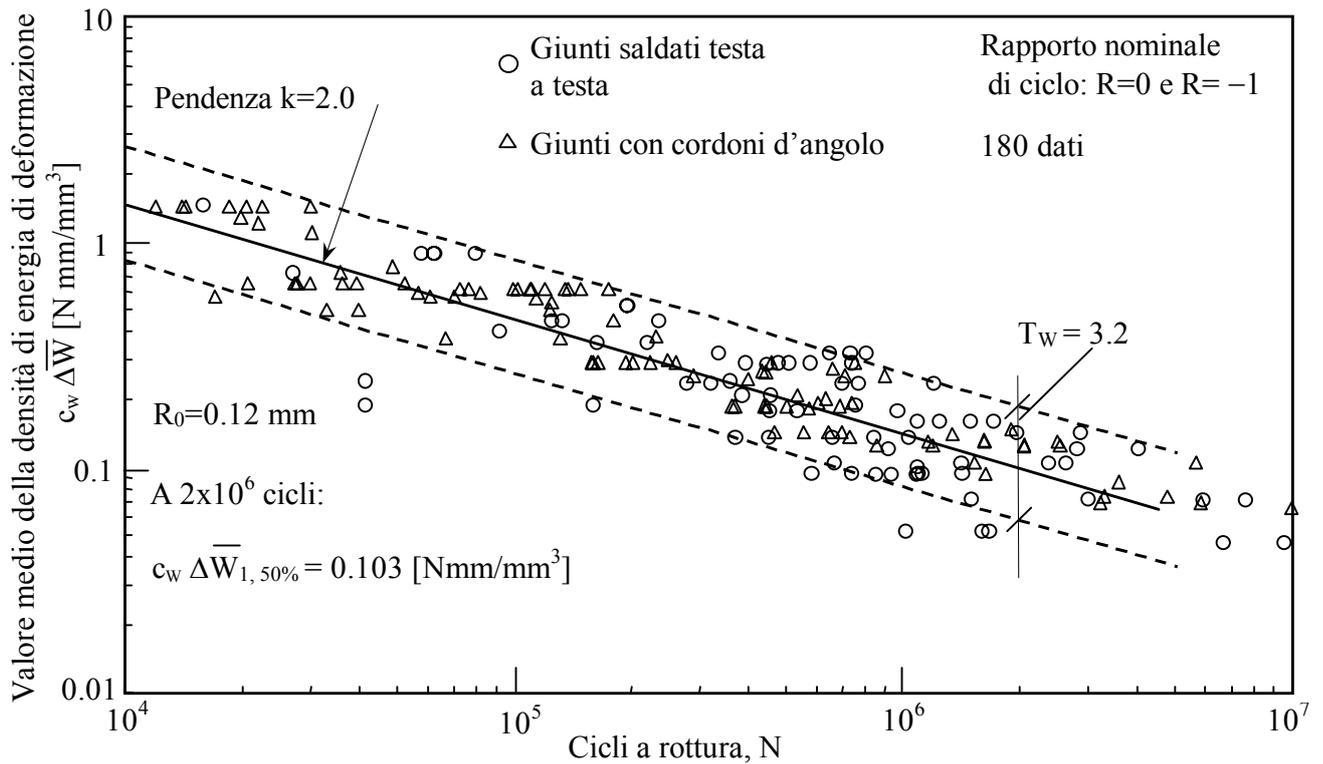
**Fig. 5:** Resistenza a fatica di giunti saldati tridimensionali in funzione del valore medio della densità di energia di deformazione [22]; dati originali dovuti a Fricke and Doerk (2006).



**Fig. 6:** Resistenza a fatica di giunti saldati tridimensionali in funzione del valore medio della densità di energia di deformazione [22]; dati originali dovuti a (Fricke and Doerk, 2006) e a Ferreira et al. (1995).



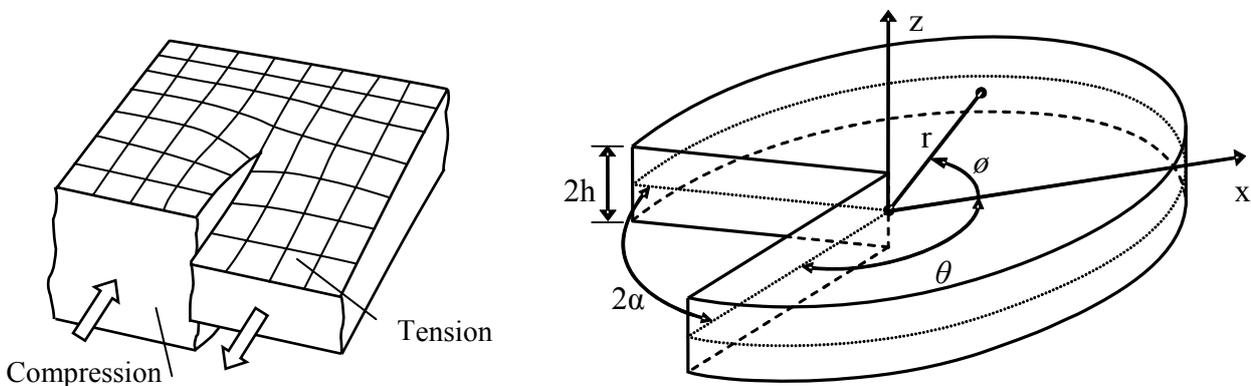
**Fig. 7:** Resistenza a fatica di giunti saldati con irrigidimento longitudinale in funzione del valore medio della densità di energia di deformazione [22]; dati originali dovuti a Maddox (1982).



**Fig. 8:** Resistenza a fatica di giunti saldati testa a testa e di giunti con cordone d'angolo in lega leggera in funzione del valore medio della densità di energia di deformazione [12,20]; banda di dispersione tratta dalla referenza [12].

### 3. SINGOLARITÀ 'OUT-OF-PLANE' INDOTTE DA EFFETTI TRIDIMENSIONALI

Il problema delle singolarità di tipo 'out-of-plane' per effetti tridimensionali legati al rapporto di Poisson è stato sollevato recentemente da Kotousov [27,28]. Tali singolarità potrebbero avere pratiche conseguenze sulle proprietà di resistenza a fatica di alcune geometrie di giunti saldati [29].



**Fig. 9.** Rappresentazione schematica dell'effetto 'out-of-plane'; sistema di coordinate utilizzato nella trattazione analitica (simbologia in accordo con le referenze [27-29]).

Si ritiene utile qui inquadrare analiticamente il problema, chiarendo le conseguenze sulle distribuzioni di tensione relative ad alcune geometrie di interesse applicativo. Adottata l'ipotesi di Kane e Mindlin di deformazione piana generalizzata e presa in esame una piastra di spessore  $2h$ , gli spostamenti risultano espressi nella forma [30]:

$$u_x = u_x(x, y), \quad u_y = u_y(x, y), \quad u_z = \frac{z}{h} w(x, y). \quad (4)$$

Introdotta una funzione di tensione  $\Phi$ , le condizioni di equilibrio e quelle di compatibilità per le deformazioni comportano:

$$\nabla^2 w - \frac{6(1+\nu)}{h^2} w = \frac{3\nu(1+\nu)}{h^2 E} \nabla^2 \Phi, \quad \nabla^4 \Phi = \frac{2\nu E}{1-\nu^2} \nabla^2 w, \quad (5a-b)$$

Il sistema disaccoppiato dà luogo a due distinte equazioni scritte in termini di  $\Phi$  e di  $w$ :

$$\nabla^4 w - \kappa^2 \nabla^2 w = 0, \quad \nabla^6 \Phi - \kappa^2 \nabla^4 \Phi = 0 \quad (\text{dove } \kappa^2 = \frac{6}{h^2(1-\nu)}) \quad (6a-b)$$

Adottando poi una funzione armonica per gli spostamenti  $\Psi$ , gli spostamenti nel piano e quelli *out-of-plane* possono essere scritti in coordinate polari nel seguente modo [27]

$$\begin{aligned} \frac{2Eh}{1+\nu} u_r &= -\frac{d\Phi}{dr} + \frac{1}{1+\nu} r \frac{d\Psi}{d\phi} & \frac{2Eh}{1+\nu} u_\phi &= -\frac{1}{r} \frac{d\Phi}{d\phi} + \frac{1}{1+\nu} r^2 \frac{d\Psi}{dr} \\ 2\nu E w &= (1-\nu^2) \nabla^2 \Phi - \frac{d}{dr} \left( r \frac{d\Psi}{d\phi} \right) \end{aligned} \quad (7a-c)$$

Nel caso di piastre molto sottili o molto spesse, le relazioni (7a-b) si riducono a quelle valide per i casi notevoli di tensione piana o deformazione piana.

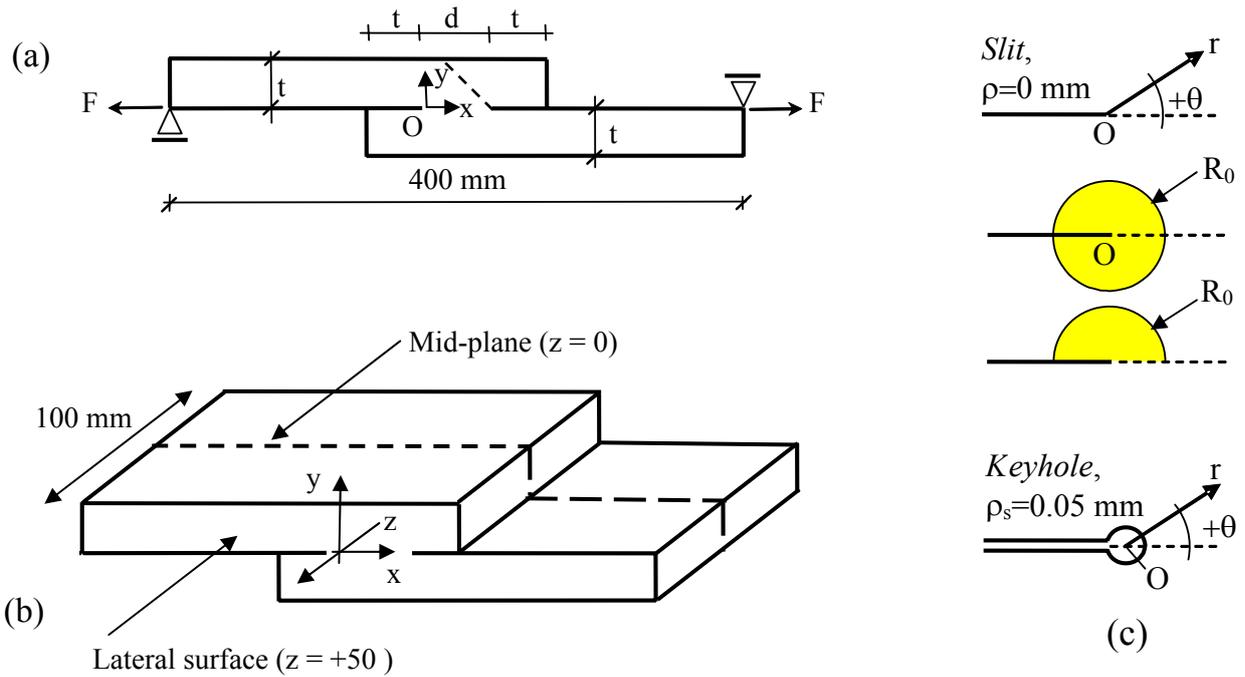
Nel caso di intaglio laterale a V mostrato in Fig. 9, le condizioni al contorno sono rappresentate dall'annullamento delle tensioni  $\sigma_\phi$  e  $\tau_{r\phi}$  sui fianchi dell'intaglio.

Assunto un comportamento asintotico in forma generale, con  $w_\lambda(r, \phi) \sim r^\lambda$ ,  $\Phi_\lambda(r, \phi) \sim r^\lambda$  e  $\Psi_\lambda(r, \phi) \sim r^{\lambda-2}$ , che comporta  $\sigma \sim r^{\lambda-1}$ , e adottato il metodo proposto da Williams per i problemi piani, l'equazione caratteristica in  $\lambda$  ha la seguente forma [28]

$$(\sin 2\lambda\theta - \lambda \sin 2\theta)(\cos \lambda\theta) = 0. \quad (8)$$

L'espressione alla sinistra rappresenta l'equazione di Williams relative al caso piano di un intaglio a V soggetto a modo II. L'espressione di destra dà invece il modo '*out-of-plane*'. Si nota come tale espressione coincida perfettamente con l'espressione che esprime gli autovalori di modo III [29]. Per illustrare la formulazione analitica, si consideri il giunto a sovrapposizione di Fig. 10 e, in particolare, il suo modello tridimensionale rappresentato in Fig. 10b. I campi di tensione sono stati determinati utilizzando modelli tridimensionali con raggio nullo alla radice dei cordoni (Fig. 10c).

I modelli piani con keyhole, anch'essi mostrati in Fig. 10c, sono stati utilizzati solo per i giunti di spessore ridotto che saranno discussi nella sezione 4 del presente contributo.



**Fig. 10.** Giunto a sovrapposizione. Modello bidimensionale avente l'origine del piano  $x$ - $y$  posizionato in corrispondenza della radice (a); modello tridimensionale con coordinata  $z=0$  nel piano medio del giunto (b); volumi di controllo per i modelli con  $\rho=0$  e modello con keyhole (c). Tensione nominale sempre riferita alla componente membranale,  $\sigma_{nom}=F/t$ .

Consideriamo dapprima le distribuzioni di tensione nel piano medio del giunto,  $z=0$ . Le componenti  $\tau_{yx}$  e  $\sigma_{yy}$  sono diagrammate in Fig. 11 in funzione della distanza dalla linea di singolarità. La figura mostra anche la  $T$ -stress, che è pari doppio della tensione nominale e la componente  $\sigma_{zz}$ . Tutte le distribuzioni fanno qui riferimento, come detto, a una tensione nominale membranale di 100 MPa, e alla condizione  $d=2t$ , con spessore  $t=20$  mm. Nel piano medio solo i campi di tensione legati alla soluzione di Williams sono singolari, mentre la componente *out-of-plane*  $\tau_{yz}$  è nulla per ragioni di simmetria. Utilizzando le espressioni (1) e i valori numerici delle componenti di tensione  $\tau_{yx}$  and  $\sigma_{yy}$ , è possibile determinare i fattori generalizzati di modo I e II. I due fattori risultano per questa geometria quasi coincidenti:  $K_{II}=452 \text{ MPa}(\text{mm})^{0.5}$  e  $K_I=450 \text{ MPa}(\text{mm})^{0.5}$ .

La pendenza delle distribuzioni legate a  $\tau_{yx}$  e  $\sigma_{yy}$  coincide perfettamente con quella teorica,  $-0.5$ . La stessa pendenza caratterizza la componente  $\sigma_{zz}$ . In parallelo il fattore di contrazione risulta avere una variabilità limitata, da circa 1.0 per  $x$  tendente a zero a circa 0.85 per  $x=1.0$  mm.

La fig. 12 mostra i campi di tensione relative sia alla superficie laterale ( $z=50$  mm), sia a una superficie parallela a questa ( $z=49.2$  mm). Le componenti di tensione  $\tau_{yx}$  e  $\sigma_{yy}$  continuano a essere singolari, ma i campi di modo II hanno ora un'intensità nettamente superiore a quella di modo I.

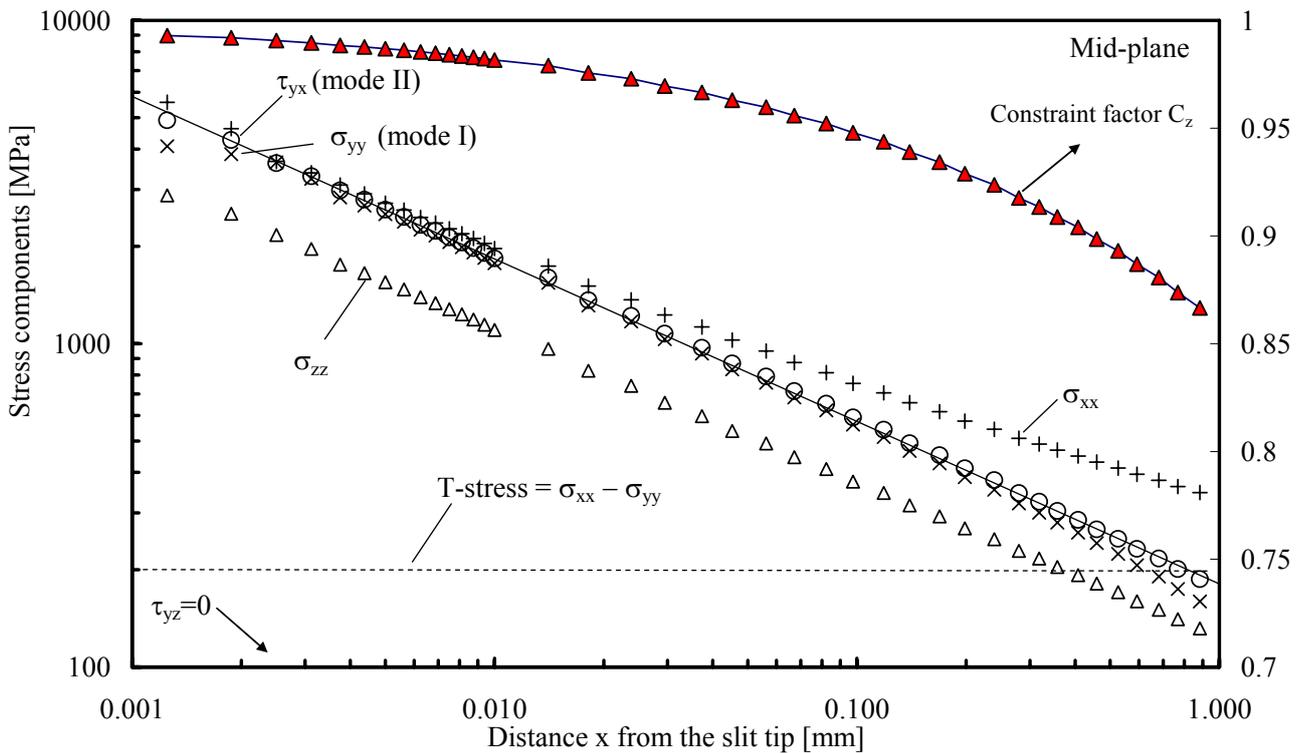
Per  $z=49.2$  mm, infatti,  $K_{II}$  risulta leggermente aumentato rispetto al valore presente nel piano medio (467 contro  $452 \text{ MPa}(\text{mm})^{0.5}$ ) mentre  $K_I$  appare nettamente ridotto (da 450 to  $63 \text{ MPa}(\text{mm})^{0.5}$ ). Assieme ai campi singolari di Williams (*in-plane modes*), si ha la comparsa di un modo singolare di tipo *out-of-plane*, così come mostrato dalla distribuzione della componente  $\tau_{yz}$ , non prevista nella soluzione di Williams. Il fattore di intensificazione associato  $K_0$  risulta pari a  $0.50K_{II}$ . L'estensione del modo *out-of-plane* in direzione  $x$  è maggiore di quella di modo I, minore di quella di modo II.

La ‘*T-stress*’ rimane costante e pari a circa 200 MPa, ossia pari alla metà di una tensione ‘strutturale’ di riferimento che computi con la teoria della trave la tensione membranale e la tensione dovuta alla flessione secondaria ( $\sigma_{st}=400$  MPa). Alle distribuzioni di tensione si accompagna una forte variazione del fattore di contrazione  $C_z$ , non documentata in figura, che scende da 0.85 a circa 0 [29].

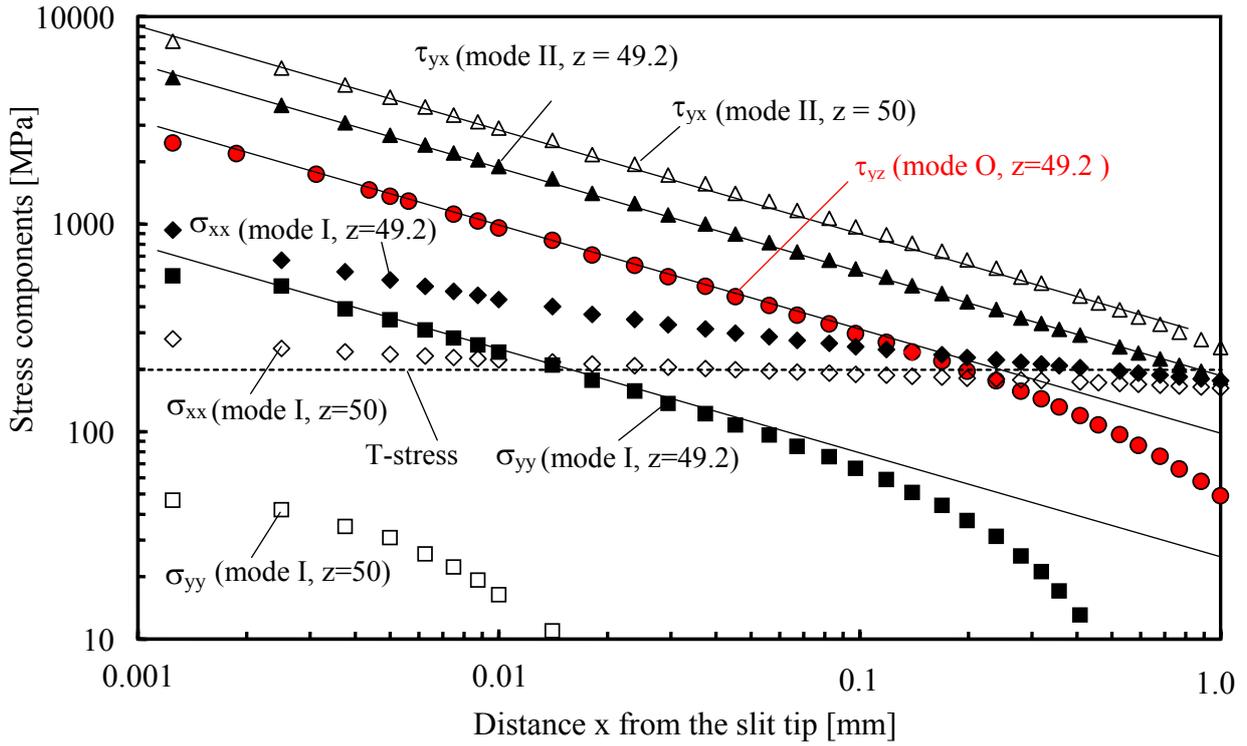
Per  $z=50$  mm, superficie laterale del giunto, la componente di tensione di modo II  $\tau_{yx}$  raggiunge il suo valore massimo. Il corrispondente NSIF vale  $K_{II}=741 \text{ MPa}(\text{mm})^{0.5}$ , con un incremento di oltre il 60% rispetto al piano medio. Contemporaneamente il campo di modo I raggiunge l’intensità minima, con una tensione  $\sigma_{yy}$  così bassa da comportare una tensione  $\sigma_{xx}$  quasi coincidente con la *T-stress*. La forte variabilità del fattore  $K_{II}$  risulta in accordo con i risultati ottenuti in passato da Nakamura e Parks [31] da analisi tridimensionali di una piastra criccata soggetta a modo II.

Le figure 11 e 12 hanno evidenziato uno stato di tensione assai complesso, con larghe variazioni dei fattori di intensificazione delle tensioni di modo I e II, e la comparsa della singolarità *out-of-plane*. Una possibile sintesi della criticità del campo di tensione lungo la linea  $x=0$  può essere fatta, a parere dello scrivente, utilizzando il valore medio della densità di energia di deformazione. Il volume di controllo è un cilindro di raggio  $R_C \approx 0.3$  mm e altezza ancora pari a  $R_C$ . Usando quel volume, i diagrammi risultano essere quelli di Fig. 13, tutti riferiti a un rapporto di Poisson  $\nu=0.3$ .

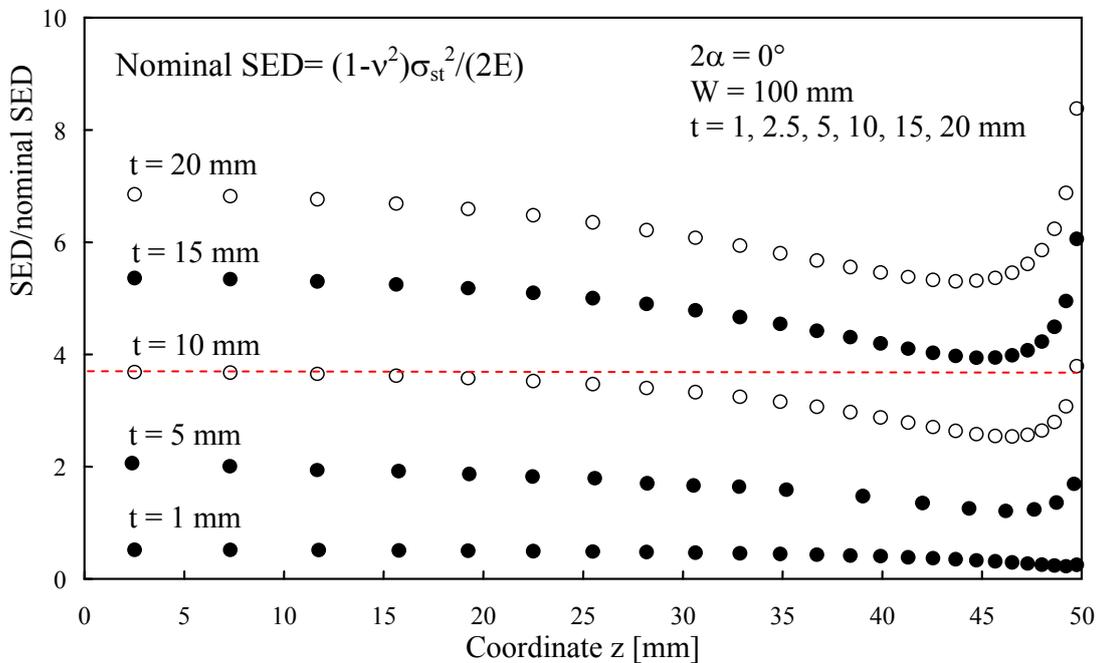
Per uno spessore di 20 mm, il valore massimo della SED è in corrispondenza della superficie laterale, aumentato di circa il 20% rispetto al piano medio. La posizione varia in funzione del rapporto tra larghezza e spessore del giunto, dell’angolo di apertura e del rapporto di Poisson  $\nu$ .



**Fig. 11:** Campi di tensione nel piano medio in funzione della distanza  $x$  (Modello tridimensionale;  $\sigma_{nom}=F/t=100$  MPa;  $W=100$  mm;  $t=20$  mm;  $d/t=2$ ) (da Harding et al. [29])



**Fig. 12:** Componenti di tensione in due diversi piani in funzione della distanza  $x$  dal punto di singolarità: tensioni sulla superficie laterale del giunto ( $z=50$  mm) e su una superficie immediatamente adiacente ( $z=49.2$  mm). Stessa geometria di figura precedente (da Harding et al. [29])



**Fig. 13:** Andamenti della densità di energia di deformazione locale (SED) per differenti spessori del piatto principale. Modelli tridimensionali con  $d=2t$ ; SED calcolata su un volume cilindrico di raggio e altezza  $R_0=0.28$  mm (da Harding et al. [29]).

#### 4. ANALISI DEI GIUNTI A SOVRAPPOSIZIONE DI RIDOTTO SPESSORE

Lo scrivente ritiene che il criterio basato sulla densità di energia di deformazione locale possa essere applicato anche ai giunti di ridotto spessore, in alternativa a altri criteri proposti in letteratura. Fra questi citiamo il criterio basato sul ‘*substitute notch radius*’ che prevede l’introduzione di un *keyhole* con raggio di 0.05 mm all’apice [32,33] e il criterio basato su *J*-integral. Quest’ultimo è stato recentemente rivisitato da Lazzarin *et al.* [26] che hanno anche operato un confronto diretto tra i tre diversi metodi.

Il convenzionale *J*-integral di Rice [34] per ‘*self-similar crack propagation*’ dipende da  $K_I$  e  $K_{II}$  ma non dalla *T*-stress:

$$J = J_1 = \int_{-\pi}^{\pi} W(r, \theta) dy - \int_{-\pi}^{\pi} \bar{T} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} ds = \int_{-\pi}^{\pi} W(r, \theta) r \cos \theta d\theta - \int_{-\pi}^{\pi} \bar{T} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} r d\theta = \frac{K_I^2}{E'} + \frac{K_{II}^2}{E'} \quad (9)$$

Una seconda componente di *J*-integral, che è differente da zero per ‘*kinking crack propagation*’ è stata formalizzata da Knowles and Stenberg [35]. Tale componente è così definita:

$$J_2 = \int_{-\pi}^{\pi} W(r, \theta) dx - \int_{-\pi}^{\pi} \bar{T} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} ds = \int_{-\pi}^{\pi} W(r, \theta) r \sin \theta d\theta - \int_{-\pi}^{\pi} \bar{T} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} r d\theta \quad (10)$$

Nelle equazioni (9) e (10)  $\bar{u}$  e  $\bar{T}$  rappresentano, come noto, il vettore degli spostamenti e il vettore delle trazioni. Poichè la densità di energia di deformazione  $W(r, \theta)$  dipende da  $K_I$ ,  $K_{II}$  e dalla *T*-stress, la seconda componente di *J*-integral risulta:

$$J_2 = J_{2,K} + J_{2,T} = -\frac{2K_I K_{II}}{E'} - \frac{2K_{II} T}{E'} \sqrt{\frac{8}{\pi}} r \quad (11)$$

Il primo termine alla destra della Eq. (35) è ben noto [36], mentre il secondo termine è stato determinato nella referenza [26] per la prima volta. Si osservi come la *T*-stress renda  $J_2$  dipendente dal percorso di integrazione tramite il raggio  $r$ . Mettendo in conto la prima e la seconda componente, è possibile esprimere un *J*-integral totale e legarlo algebricamente a un fattore di intensificazione delle tensioni equivalente  $K_{eq}$  [26]:

$$J = \sqrt{J_1^2 + J_2^2} = \frac{1}{E'} \sqrt{K_I^4 + 2K_I^2 K_{II}^2 + K_{II}^4 + \left( -2K_I K_{II} - 2K_{II} T \sqrt{\frac{8}{\pi}} r \right)^2} = \frac{K_{eq}^2}{E'} \quad (12)$$

La Tabella 2 presenta i valori del SED da ‘*full circles*’ con raggio  $R_0=0.28$  mm assieme ai parametri  $J_1$ ,  $J_{2,K}$ ,  $J_{2,T}$ ,  $J$  e  $J/2\pi R_0$ . L’ultimo parametro normalizza  $J$  rispetto al perimetro del volume di controllo  $2\pi R_0$ , come suggerito da Berto *et al.* [37,38].

Il contributo di  $J_2$  è sempre maggiore del contributo di  $J_1$  quando  $t = 1$  mm (mentre i due contributi sono invece vicini tra loro per  $t = 5$  mm, [26]). Per  $d/t \geq 2.0$ , la massima differenza tra  $J$  e SED è minore dell’8%, il che significa  $\bar{W} \approx J/2\pi R_0$  in questi casi. Le differenze crescono per  $d/t = 1.0$  e  $0.5$ , ma restano comunque piuttosto contenute.

**Tabella 2.** Giunti a cordone continuo saldati a sovrapposizione,  $F/(t \times 1) = 10$  MPa (da Lazzarin, Berto e Radaj, 2009 [26]). Valori di  $J = \sqrt{J_1 + J_2}$  basati sulla prima componente ( $J_1$ ) e la seconda componente ( $J_2 = J_{2,K} + J_{2,T}$ ) di  $J$ -integral; confronto tra i parametri  $J/(2\pi R_0)$  e SED entrambi riferiti a un volume di controllo circolare di raggio  $R_0 = 0.28$  mm.

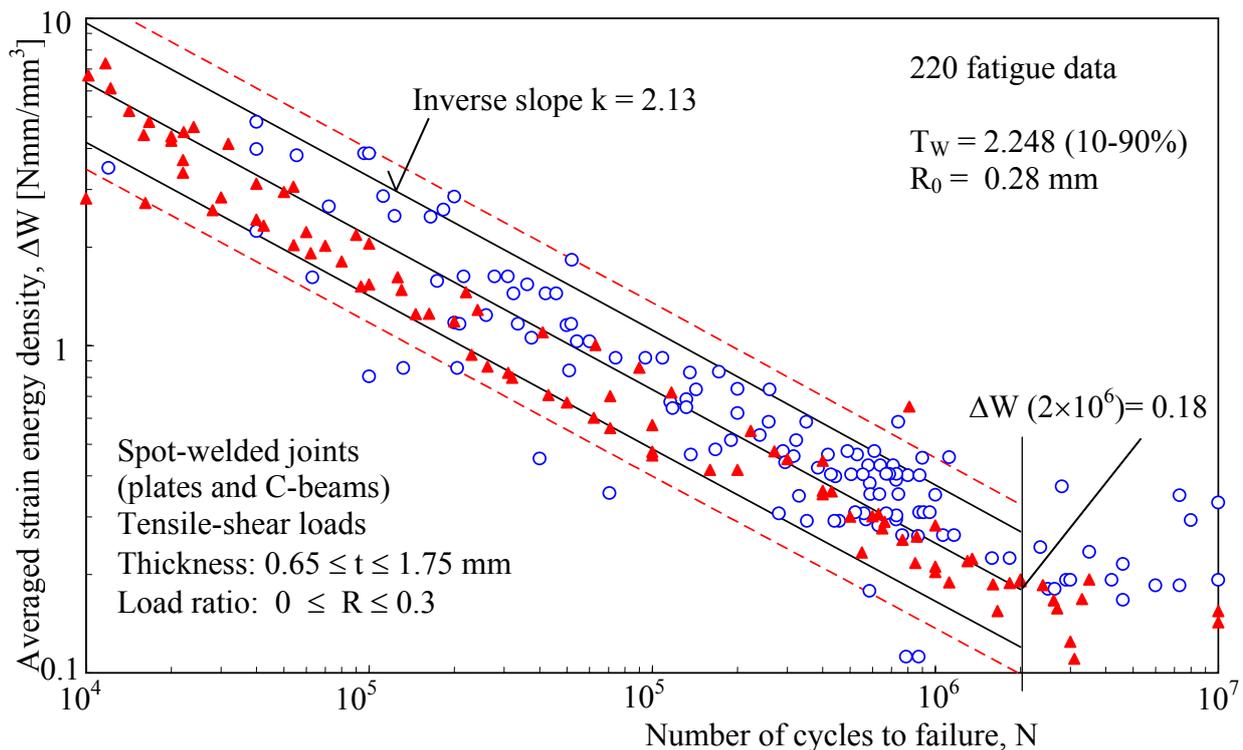
$R_0 = 0.28$ mm $t = 1$ mm	$J_1 (\times 10^3)$ (N/mm)	$J_{2,K} (\times 10^3)$	$J_{2,T} (\times 10^3)$	$J (\times 10^3)$	$J/(2\pi R_0)$ (Nmm/mm <sup>3</sup> )	$\bar{W} (\times 10^3)$ (Nmm/mm <sup>3</sup> )	$\Delta$ (%)
d/t=0.5	0.671	0.175	1.815	2.100	1.194	1.412	-15.4
1	0.550	0.395	1.496	1.969	1.120	1.208	-7.3
2	0.726	0.710	1.336	2.172	1.235	1.183	4.4
3	0.765	0.757	1.307	2.201	1.252	1.181	6.0
8	0.764	0.756	1.307	2.200	1.251	1.180	6.0

Si ritiene utile riportare un confronto tra previsioni espresse in termini di SED (tutte relative a modelli con  $\rho = 0$ ) e previsioni basate sul fattore teorico di concentrazione delle tensioni, così come determinato da modelli con 'keyhole' (vedi Fig. 4c). In questi casi l'apice della fessura presenta un raggio di raccordo  $\rho_s = 0.05$  mm, così come suggerito da Sonsino *et al.* in [32,33]. La Tabella 11, tratta dalla referenza [26], mette a controllo valori di  $K_t$  e di  $\sqrt{W}$ , tutti normalizzati rispetto alla geometria di riferimento avente  $d/t = 3.0$ . La corrispondenza è molto buona con variazioni percentuali inferiori al 4% per i modelli a cerchio pieno.

**Tabella 3:** SED e fattori teorici di concentrazione delle tensioni normalizzati rispetto al caso  $d/t = 3.0$  (da Lazzarin, Berto e Radaj, 2009, [26]).

	$K_t/K_t^*$ $\rho = 0.05$ mm	$\sqrt{W/W^*}$ $R_0 = 0.28$ mm circle	$\sqrt{W/W^*}$ $R_0 = 0.28$ mm semicircle
t=1mm, d/t=0.5	1.137	1.093	1.064
1	1.000	1.011	1.021
2	0.998	1.001	1.006
3	1.000	1.000	1.000

Una sintesi finale in termini di SED è presentata in Fig. 15 per giunti a sovrapposizione saldati a punti. Lo spessore varia tra 0.65 mm e 1.75 mm, il rapporto nominale di ciclo  $R$  tra 0.05 e 0.3. I dati sperimentali sono stati tratti dalla letteratura recente, dal 2003 in poi. Al momento il volume di controllo fa ancora riferimento al raggio  $R_0 = 0.28$  mm (valido a rigore per i giunti di medio ed elevato spessore), senza avere quindi ancora operato alcun processo di ottimizzazione per i giunti di spessore ridotto. La dispersione rimane in linea con quella caratteristica della banda di Haibach, mentre la pendenza risulta superiore a quella dei giunti di medio ed elevato spessore saldati ad arco,  $k = 2.13$ , che diventa ovviamente  $k = 4.26$  in termini di range di tensione locale equivalente.



**Fig.14:** Banda di dispersione relativa a giunti a sovrapposizione saldati a punti soggetti a sollecitazioni di trazione/taglio (piatti e travi a C). Valori di  $\Delta W$  determinati da modelli tridimensionali.

## 5. CONCLUSIONI

Il lavoro ha presentato le linee guida del criterio basato sul valore medio della densità di energia di deformazione  $\Delta W$  valutata in un ben preciso volume di controllo posizionato al piede e alla radice dei cordoni di saldatura. Nei giunti di medio ed elevato spessore la densità di energia di deformazione dipende quasi esclusivamente dai fattori di intensificazione di modo I al piede dei cordoni, dai fattori di modo I e II alla radice nel caso di giunti a cordone portante. Anche per queste geometrie il contributo di modo I resta prevalente.

Circa 900 dati sperimentali di resistenza a fatica relativi a giunti saldati aventi geometrie molto diverse fra loro sono stati presentati in termini di  $\Delta W-N$  chiarendo la posizione e la pendenza della Banda di dispersione associata.

Al ridursi delle dimensioni assolute dei giunti la zone controllate dalle singolarità di ordine prevalente si riducono e il calcolo della densità di energia non può più limitarsi ai termini singolari del primo ordine. Il problema è stato evidenziato per il giunti a semplice sovrapposizione di spessore ridotto ( $t=1$  mm) laddove l'effetto della  $T$ -stress parallela alle superficie affacciate gioca un ruolo rilevante sul stato di tensione e deformazione presente nella zona di innesco delle cricche di fatica. Anche per i giunti di spessore ridotto il criterio basato sul valore medio della densità di energia di deformazione appare promettente e alternativo ad altri criteri basati su  $J$ -integral o su modelli che vedono la radice dei cordoni modellata mediante *keyhole* con raggio di raccordo all'apice molto ridotto ( $\rho_s=0.05$  mm).

Il lavoro ha anche discusso la possibile esistenza di modi singolari *out-of-plane*, che nascono nei giunti saldati per effetto Poisson, in combinazione con stati tensionali di modo II (singolari e non singolari). Questi singolarità non convenzionali, non contemplate dalla trattazione di Williams,

concorrono a giustificare lo spostamento del punto di innesco delle cricche di fatica dal piano medio dei giunti alle superficie laterali. Comunque sia, il criterio basato della densità di energia di deformazione si mostra in grado di computare correttamente anche gli effetti *out-of-plane* se utilizzato in combinazione con modelli tridimensionali dei giunti.

Come evidenziato in alcuni contributi recenti riportati in bibliografia, uno dei maggiori vantaggi del criterio basato sulla densità di energia di deformazione è legato al possibile utilizzo di *mesh* a maglia larga attorno al volume di controllo posizionato nelle zone di possibile innesco delle cricche di fatica, superando il problema dei metodi basati sulla valutazione diretta dei campi di tensione locali che richiedono invece *mesh* con elevato grado di infittimento.

## Bibliografia

- [1] Radaj D., Sonsino C. M., Fricke, W. (2006) Fatigue assessment of welded joints by local approaches, Woodhead Publishing, Cambridge, 2nd edn.
- [2] Radaj D. (1990) Design and analysis of fatigue resistant welded structures, Abington Publishing, Cambridge.
- [3] Radaj D., Sonsino C. M., Fricke W. (2009) Recent developments in local concepts of fatigue assessment of welded joints. *Int J Fatigue* **31**, 2-11.
- [4] Lazzarin P., Tovo, R. (1998). A Notch Intensity Approach to the stress analysis of welds. *Fatigue Fract Engng Mater Struct* **21**, 1089-1104.
- [5] Atzori B. (1985) Fracture mechanics or notch effect for fatigue design (in Italian). Proc. XIII Conference of the Italian Society for Strain Analysis, 294-307, Bergamo, Italy.
- [6] Atzori B. (1985) Analysis of the size effect on the fatigue strength of welded structures (in Italian)'. Proc. of the Italian Conference on Fatigue Strength of Welded Structures, Genova, Italy.
- [7] Williams M. L. (1952) Stress singularities resulting from various boundary conditions in angular corners of plates in extension. *J Appl Mech* **19**, 526-528.
- [8] Lazzarin P., Livieri P. (2001) Notch Stress Intensity Factors and fatigue strength of aluminium and steel welded joints. *Int J Fatigue* **23**, 225-232.
- [9] Lazzarin P., Zambardi R. (2001) A finite-volume-energy based approach to predict the static and fatigue behaviour of components with sharp V-shaped notches. *Int J Fract* **112**, 275-298.
- [10] Lazzarin P., Zambardi R. (2002) The Equivalent Strain Energy Density approach reformulated and applied to sharp V-shaped notches. *Fatigue Fract Engng Mater Struct* **25**, 917-928.
- [11] Lazzarin P., Lassen T., Livieri P. (2003) A Notch Stress Intensity approach applied to fatigue life predictions of welded joints with different local toe geometry. *Fatigue Fract Engng Mater Struct* **26**, 49-58.
- [12] Livieri P., Lazzarin P. (2005) Fatigue strength of steel and aluminium welded joints based on generalised stress intensity factors and local strain energy values. *Int J Fract* **133**, 247-276.
- [13] Lazzarin P. (2000) The influence of bending on stress fields and fatigue strength of cruciform welds, *Welding Int* **14**, 115-119. Traduzione da: *Riv Ital Saldatura* (1999) **51**, 137-143.
- [14] Glinka G., Molski K. (1981) A method of elastic-plastic stress and strain calculation at a notch root. *Mater Sci Engng* **50**, 93-100.
- [15] Lazzarin P., Berto F. (2008) Control volumes and strain energy density under small and large scale yielding due to tensile and torsion loading. *Fatigue Fract Engng Mater Struct* **31**, 95-107.
- [16] Radaj D., Berto F., Lazzarin P. (2009) Local fatigue strength parameters for welded joints based on strain energy density with inclusion of small-size notches. *Engng Fract Mech*, in press, available on line.
- [17] Radaj D., Lazzarin P., Berto F. (2009) Fatigue assessment of welded joints under slit-parallel loading based on strain energy density or notch rounding. Submitted to *Int J Fatigue*.
- [18] Berto F, Lazzarin P, Radaj D (2008) Fictitious notch rounding concept applied to sharp V-notches: evaluation of the microstructural support factor for different failure hypotheses. Part I: Basic stress equations. *Engng Fracture Mech* **75**, 3060-3072. Part II: Microstructural support analysis. *Engng Fracture Mech*, 2009, in press, available online.
- [19] Berto F., Lazzarin P. (2009) The volume-based Strain Energy Density approach Applied to static and

fatigue strength assessments of notched and welded structures. Proc. Mesomechanics Conference, Oxford, 24-26 June, 2009.

- [20] Lazzarin P., Berto F., Radaj D. (2006) Uniform fatigue strength of butt and fillet welded joints in terms of the local strain energy density. Proc. 9<sup>th</sup> Int Fatigue Congress, IFC9, Atlanta, USA (Organised by Elsevier). On CD Rom.
- [21] Haibach E. (2002) Service fatigue strength – methods and data for structural analysis (in German), Springer Verlag, Berlin.
- [22] Lazzarin P., Berto F., Gomez F.J., Zappalorto M. (2008) Some advantages derived from the use of the strain energy density over a control volume in fatigue strength assessments of welded joints. Int J Fatigue **30**, 1345-1357.
- [23] Lazzarin P., Berto F., Radaj D. (2007) Fatigue design of welded joints by local approaches: comparison between fictitious notch rounding and strain energy averaging, Key Engineering Materials Vol. 348-349, Advances in Fracture and Damage Mechanics VI, 449-452.
- [24] Gross R., Mendelson A. (1972) Plane elastostatic analysis of V-notched plates. Int J Fract Mech **8**, 267-276.
- [25] Lazzarin P., Livieri P., Berto F., Zappalorto M. (2008) Local strain energy density and fatigue strength of welded joints under uniaxial and multiaxial loading, Engng Fract Mech, **75**, 1875-1889.
- [26] Lazzarin P., Berto F., Radaj D. (2008) Fatigue-relevant stress field parameters of welded lap joints: pointed slit tip versus keyhole notch. Fatigue Fract Engng Mater Struct, under revision.
- [27] Kotousov A., Lew T. L. (2005) Stress singularities resulting from various boundary conditions in angular corners of plates of arbitrary thickness in extension. Int J Solids Struct **43**: 5100-5109.
- [28] Kotousov A. (2007) Fracture in plates of finite thickness. Int J Solids Struct **44**: 8259-8273.
- [29] Harding S., Kotousov A., Lazzarin P., Berto F. (2009) Transverse singular effects in V-shaped notches stressed in Mode II, submitted.
- [30] Kane T. R., Mindlin R. D. (1956) High frequency extensional vibrations of plates. J Appl Mech **23**, 277-283.
- [31] Nakamura T., Parks D. M. (1989) Antisymmetrical 3-D stress field near the crack front of a thin elastic plate. Int J Solids Struct **25**, 1411-1426.
- [32] Eibl, M., Sonsino, C.M., Kaufmann, H. and Zhang, G. (2003) Fatigue assessment of laser-welded thin sheet aluminium. Int J Fatigue **25**, 719-731.
- [33] Karakas Ö., Morghenstern C., Sonsino C. M. (2008) Fatigue design of welded joints from the wrought magnesium alloy AZ31 by the local stress concept with the fictitious notch radii of  $r_f=1.0$  and  $r_f=0.05$  mm. Int J Fatigue **30**, 2210-2219.
- [34] Rice J. R. (1968) A path independent integral and the approximate analysis of strain concentration by notches and cracks. J Appl Mech **35**, 379-386.
- [35] Knowles J. K., Stenberg E. (1972) On a class of conservation laws in linearized and finite elastostatics. Archives for Rational Mechanics and Analysis **44**, 187-211.
- [36] Gdoutos E. E. (1990) Fracture mechanics criteria and applications. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.
- [37] Berto F., Lazzarin P. (2007) Relationships between J-integral and the strain energy evaluated in a finite volume surrounding the tip of sharp and blunt V-notches, Int J Solids Struct **44**, 4621-4645.
- [38] Berto F., Lazzarin P., Gómez F. J., Elices M. (2007) Fracture assessment of U-notches under mixed mode loading: two procedures based on the equivalent local mode I concept. Int J Fract **148**, 145-433.