

DETERMINAZIONE DELLO STATO DI TENSIONE ALL'APICE  
DI FESSURE IN CORPI PIANI

M.Beghini, L.Bertini e E.Vitale

Dipartimento di Costruzioni Meccaniche e Nucleari  
Via Diotallevi, 2 - 56126 PISA

SOMMARIO

Nella memoria viene presentato un metodo numerico per la valutazione della distribuzione delle tensioni all'apice di una fessura in condizioni di Modo I di frattura. Il metodo è basato sulla conoscenza della Weight Function e sfrutta una sua particolare proprietà per imporre una equazione integrale la cui funzione incognita è lo stato di tensione all'apice del difetto. Tale equazione viene risolta mediante una adatta tecnica numerica mostrando come il metodo proposto consenta di ottenere una accurata descrizione dello stato di tensione in un ampio campo di variazione della distanza dall'apice del difetto. È infine discusso l'impiego del metodo nell'applicazione di un semplice criterio locale di frattura.

INTRODUZIONE

Dai fondamenti della Meccanica della Frattura Lineare Elastica (MFLE) [1,2], è noto che lo stato di tensione all'apice di una fessura in condizioni di Modo I di frattura può essere espresso, per  $\Theta=0$  con riferimento alla figura 1, come uno sviluppo in serie di potenze della distanza dall'apice tramite la seguente espressione:

$$\sigma_{yy}(x,a) = \frac{K(a)}{\sqrt{2\pi(x-a)}} + \sum_{i=1}^{\infty} C_i \cdot (x-a)^{(i-1)/2} \quad x > a \quad (1)$$

in cui 'a' indica la lunghezza di fessura,  $K(a)$  rappresenta il valore del Fattore di Intensificazione degli Sforzi (FIS) per il Modo I di frattura ed i coefficienti  $C_i$  (di solito incogniti) dipendono in genere dalla geometria e dal tipo di carico applicato.

Se si considera una regione molto piccola davanti all'apice del difetto (ovvero quando  $x \rightarrow a$ ), il primo termine della somma, che contiene il FIS ed è illimitato, risulta preponderante rispetto agli altri termini che invece si annullano quando  $x=a$ . A causa di ciò, quando è richiesto di determinare la

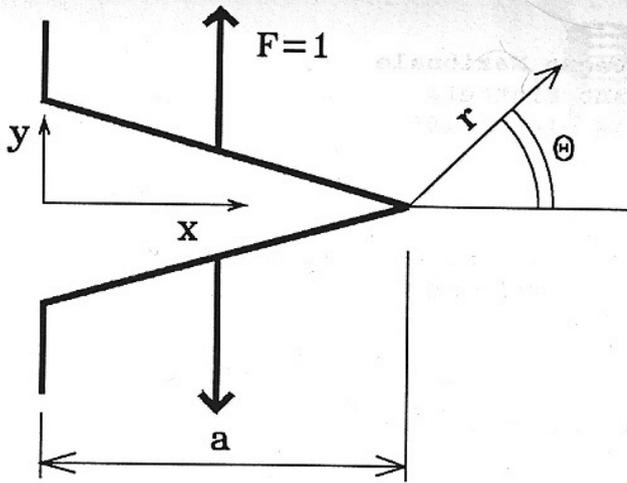


Fig. 1 - Schema di fessura

distribuzione di sollecitazioni all'apice di un difetto, come ad esempio avviene per l'applicazione di criteri locali di frattura, si usa approssimare lo stato di tensione  $\sigma_{yy}(x,a)$  mediante il solo termine asintotico. Questa approssimazione è giustificata da motivi di ordine pratico, in quanto richiede la sola conoscenza del FIS per la cui stima sono disponibili numerose tecniche e che, per moltissime geometrie, è direttamente disponibile nella letteratura tecnica. Tale approssimazione può peraltro rivelarsi inadeguata per alcune applicazioni poiché la differenza tra il termine asintotico e l'andamento effettivo

delle tensioni può crescere rapidamente all'aumentare della distanza dall'apice del difetto. È inoltre significativo notare che tale differenza non è in genere una funzione del solo FIS ma risulta fortemente legata ad altri fattori quali la geometria del corpo, la disposizione dei vincoli e la distribuzione delle tensioni nominali (tensioni che si avrebbero nello stesso corpo non fessurato  $\sigma_{yy}(x,0)$ ).

Nei casi in cui è richiesta una conoscenza più accurata della distribuzione dello stato di tensione all'apice, si può ricorrere all'impiego di tecniche numeriche come gli Elementi Finiti o di Contorno. Con tali strumenti è infatti possibile ottenere accurate riproduzioni dello stato di tensione in molti casi di pratico interesse ma, di solito, sono necessari un certo grado di esperienza per la definizione del modello ed un non trascurabile impiego di risorse di calcolo, dato che si deve ricorrere a tecniche di affinamento del "mesh" nella zona d'apice e possibilmente anche ad elementi con particolari funzioni di forma.

Di conseguenza, in particolare per l'applicazione di criteri locali di frattura, si rivela piuttosto utile lo sviluppo di strumenti alternativi per la valutazione della tensione all'apice che non richiedano complesse o costose analisi numeriche. Nel presente lavoro, si propone l'impiego di una tecnica numerica che permette la valutazione accurata della tensione all'apice basandosi solamente sulla conoscenza della Weight Function (WF).

Il metodo delle WF, che è stato introdotto da Bueckner [3] e da Rice [4], ha avuto negli ultimi anni un notevole sviluppo in quanto consente una rapida e generale soluzione del problema della determinazione del FIS per corpi con comportamento lineare elastico. In un problema piano, la WF (nel seguito indicata con  $h(x,a)$ ) può essere interpretata come il FIS che è prodotto da una coppia di forze unitarie opposte applicate in posizione generica 'x' ai labbri di una fessura di lunghezza 'a' (cfr. la figura 1). Si può dimostrare che tale funzione dipende solo dalle condizioni di vincolo e dalla geometria (in particolare dalla lunghezza di fessura) e per questo, quando è nota per un certo corpo, può essere efficacemente impiegata nella determinazione del FIS per differenti condizioni di carico. Infatti, indicando con  $\sigma_{yy}(x,0)$  la tensione nominale agente sul corpo e utilizzando il principio di sovrapposizione degli effetti, risulta:

$$K(a) = \int_0^a \sigma_{yy}(x,0) \cdot h(x,a) \cdot dx \quad (2)$$

Il vantaggio principale che deriva dalla applicazione del metodo delle WF consiste nel fatto che solitamente la tensione nominale è una funzione regolare (non singolare) e che spesso può essere valutata mediante semplici modelli di calcolo. Questo fatto giustifica il costo per la determinazione della WF soprattutto per quei problemi in cui il FIS deve essere valutato in numerose condizioni di carico e spiega il recente interesse per l'applicazione di tale tecnica. Ad oggi, è reperibile nella letteratura tecnica un discreto numero di WF per molti problemi di pratico interesse ed inoltre sono state proposte ed applicate molte tecniche per la determinazione delle WF per i casi non noti [5-15].

Sulla base di queste considerazioni, si può considerare il metodo proposto uno strumento utile e facilmente applicabile per la valutazione della distribuzione delle tensioni all'apice in molti problemi pratici.

#### FONDAMENTI DEL METODO

In un recente lavoro [16], gli autori hanno evidenziato come il FIS per una fessura di lunghezza generica 'c' possa essere ottenuto, sulla base della relazione (2), non solamente integrando la tensione nominale ( $\sigma_{yy}(x,0)$ ) sull'intera lunghezza di fessura ( $0 < x < c$ ) ma anche integrando la tensione ( $\sigma_{yy}(x,a)$ ) che viene prodotta all'apice di una fessura di lunghezza minore 'a'. Con riferimento alla figura 2, per ogni fessura di lunghezza 'a' ( $a < c$ ), ne risulta che può essere scritta la seguente relazione:

$$\int_a^c \sigma_{yy}(x,a) \cdot h(x,c) \cdot dx = \int_0^c \sigma_{yy}(x,0) \cdot h(x,c) \cdot dx \quad (3)$$

Nel citato lavoro, la relazione (3) è stata impiegata per determinare la WF,  $h(x,a)$ , sfruttando la conoscenza (anche piuttosto approssimata) della distribuzione di tensioni all'apice  $\sigma_{yy}(x,a)$  per una sequenza di lunghezze di fessura. Al contrario, una volta che la WF sia nota, la relazione (3) può essere impiegata per valutare la funzione  $\sigma_{yy}(x,a)$ . In particolare, assumendo un corpo piano con una fessura di lunghezza data 'a' e considerando una ipotetica fessura di lunghezza generica 'c' ( $c > a$ ) (cfr. Fig. 2), la relazione (3) può essere riscritta nella forma seguente:

$$\int_a^c \sigma_{yy}(x,a) \cdot h(x,c) \cdot dx = K(c) \quad (4)$$

in cui  $K(c)$  è stato ottenuto applicando la (2).

La relazione (4) è una classica equazione integrale di Volterra di seconda

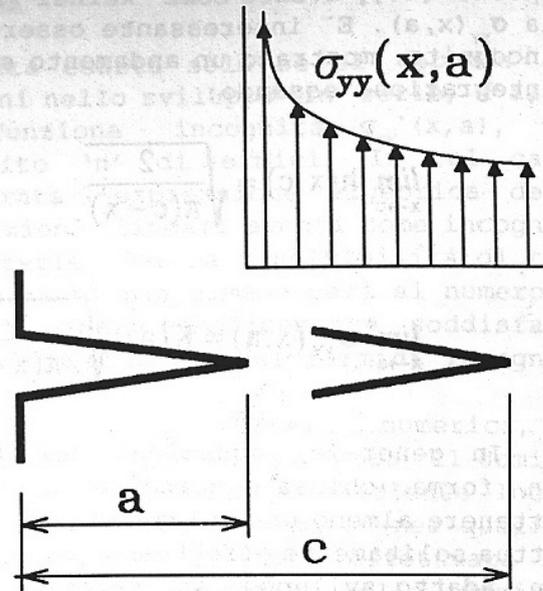


Fig. 2 - Schema per la relazione (3)

specie [17], avente come 'kernel' la funzione  $h(x,c)$  e come funzione incognita la  $\sigma_{yy}(x,a)$ . È interessante osservare che entrambe le funzioni, 'kernel' ed incognita, mostrano un andamento singolare in uno degli estremi del dominio di integrazione essendo:

$$\lim_{x \rightarrow c} h(x,c) = \sqrt{\frac{2}{\pi(c-x)}} \quad (5)$$

e

$$\lim_{x \rightarrow a} \sigma_{yy}(x,a) = K(a) \cdot \sqrt{\frac{1}{2\pi(x-a)}} \quad (6)$$

In generale, equazioni del tipo (4) non si prestano per essere risolte in forma chiusa e quindi è necessario ricorrere a tecniche numeriche per ottenere almeno una soluzione approssimata della funzione incognita. Questo si attua solitamente effettuando la sostituzione della funzione incognita mediante un adatto sviluppo in serie [18] che consente di trasformare il problema analitico in un problema algebrico. Nel presente lavoro è stato utilizzato uno sviluppo in serie di potenze con coefficienti  $\beta_i$  come suggerito dalla relazione (1):

$$\sigma_{yy}(x,a) = \sum_{i=0}^n \beta_i \cdot (x-a)^{(i-1)/2} \quad (7)$$

Nella serie di potenze (7) il primo coefficiente risulta noto essendo, per la (1):  $\beta_0 = K(a)/(2\pi)^{1/2}$  mentre per  $i=1..n$ , i coefficienti  $\beta_i$  devono essere determinati. Se si fissa un sequenza di 'm' fessure di lunghezza ' $c_j$ ' (con  $c_j > a$  e  $j=1..m$ ), per ognuna di esse può essere imposta una condizione del tipo (4):

$$\int_a^{c_j} \sum_{i=0}^n \beta_i \cdot (x-a)^{(i-1)/2} \cdot h(x,c_j) \cdot dx = K(c_j) \quad (8)$$

che può essere formalmente trasformata nella seguente:

$$\sum_{i=1}^n D_{ij} \cdot \beta_i = K(c_j) - \beta_0 \cdot D_{0j} \quad (9)$$

i cui coefficienti  $D_{ij}$  sono valori noti in quanto ottenibili dai seguenti integrali:

$$D_{ij} = \int_a^{c_j} (x-a)^{(i-1)/2} \cdot h(x,c_j) \cdot dx \quad (10)$$

Gli integrali (10) possono essere infatti agevolmente risolti numericamente oppure, se l'espressione della WF lo consente (ad esempio se è disponibile nella forma indicata in [16]), anche analiticamente.

L'equazione (9) così ottenuta fornisce un insieme di condizioni algebriche sui coefficienti incogniti delle serie (7) che possono consentire la loro determinazione numerica.

## SOLUZIONE NUMERICA E CRITERI DI CONVERGENZA

In linea teorica, l'equazione (7) risulta esatta solo se si prende in considerazione un numero infinito di termini nello sviluppo in serie, d'altro lato, una forma approssimata della funzione incognita,  $\sigma_{yy}^*(x,a)$ , può essere ottenuta assumendo un numero finito 'n' di termini. In tal caso, l'equazione (9), che può essere considerata l'espressione algebrica della (4), costituisce un sistema di 'm' equazioni lineari aventi come incognite gli 'n' coefficienti  $\beta_i$  dello sviluppo in serie. Per la risolubilità di tale sistema è necessario che il numero di equazioni sia almeno pari al numero di incognite ( $m \geq n$ ) e questa condizione può essere semplicemente soddisfatta fissando un numero di fessure 'c<sub>j</sub>' non inferiore al numero dei termini incogniti della serie.

Nel presente lavoro, allo scopo di limitare gli errori numerici, i coefficienti 'D<sub>ij</sub>' definiti in (10), sono stati valutati dividendo il dominio di integrazione in intervalli di dimensione proporzionale al gradiente locale della funzione integranda. Per gli intervalli di estremità (nei quali la funzione integranda è illimitata ma integrabile) è stata effettuata una integrazione analitica utilizzando l'espressione asintotica della funzione, mentre per gli intervalli interni, il calcolo è stato condotto mediante un procedimento di quadratura gaussiana a 5 punti.

E' evidente che il numero di termini della serie influenza in modo determinante l'accuratezza della soluzione e le caratteristiche di convergenza del metodo numerico. Per effettuare una scelta opportuna di tale parametro è necessario tener conto di due fattori principali: l'estensione della zona in cui si vuole riprodurre l'andamento dello stato di tensione e la complessità della funzione che esprime la tensione nominale. In genere, più ampia è la regione di analisi e più complesso lo stato di tensione applicati, maggiore deve essere il numero di termini. Se, ad esempio, si considera il caso di una regione piuttosto ampia (confrontabile con 'a') per un corpo soggetto ad uno stato di sforzo piuttosto semplice (ad esempio con andamento lineare in x, come in presenza di un momento flettente), lo sviluppo in serie deve comprendere almeno 4 termini ( $n=3$ ) al fine di riprodurre un gradiente costante di tensione lontano dalla zona d'apice. Inoltre, quando lo stato di tensione nominale è particolarmente complesso (come accade per le fessure che si originano al fondo di intagli o per corpi fessurati con autotensioni) il numero di termini deve essere più elevato.

Anche il numero di equazioni 'm' può influenzare l'accuratezza della soluzione. Infatti, entro certi limiti, si può ottenere una riduzione degli errori numerici se invece di imporre le condizioni strettamente necessarie ( $m=n$ ) si considera un numero di condizioni maggiore e si risolve il sistema mediante la tecnica dei minimi quadrati.

E' molto difficile dare delle indicazioni precise sulla scelta dei parametri migliori per l'analisi di un problema generico. Il metodo consente però di avere un controllo a posteriori della sua accuratezza che permette di indicare possibili interventi di miglioramento nella scelta dei parametri. In relazione al problema del controllo della precisione, fissato 'a', l'errore totale di stima sul valore puntuale della tensione può essere definito come segue:

$$e_T(x) = \frac{\sigma_{yy}^*(x,a) - \sigma_{yy}(x,a)}{\sigma_{yy}(x,a)} \quad (11)$$

Questa funzione non può essere valutata nel caso generale dato che ovviamente il valore esatto della distribuzione  $\sigma_{yy}(x,a)$  non è noto, tuttavia

essa può essere usata come confronto per altri estimatori dell'errore totale in particolari casi. Tra questi estimatori si può considerare l'errore prodotto nella stima del FIS, che può essere scritto nel modo seguente:

$$e_K(x) = \frac{\int_a^x \sigma_{yy}^*(x', a) \cdot h(x', x) \cdot dx' - K(x)}{K(x)} \quad (12)$$

e che può essere valutato semplicemente sulla base del metodo adottato.

E' necessario sottolineare che, in genere,  $e_K$  non rappresenta una sovrastima di  $e_T$  per ogni valore di  $x$ , ma si può facilmente mostrare che entrambe tali funzioni di errore tendono alla funzione nulla quando la soluzione approssimata tende a quella corretta. Inoltre l'espressione (12) offre anche il vantaggio di avere un chiaro significato fisico. Pertanto la funzione  $e_K$  può essere utilmente impiegata al fine di confrontare le soluzioni ottenute mediante diverse combinazioni dei parametri del modello.

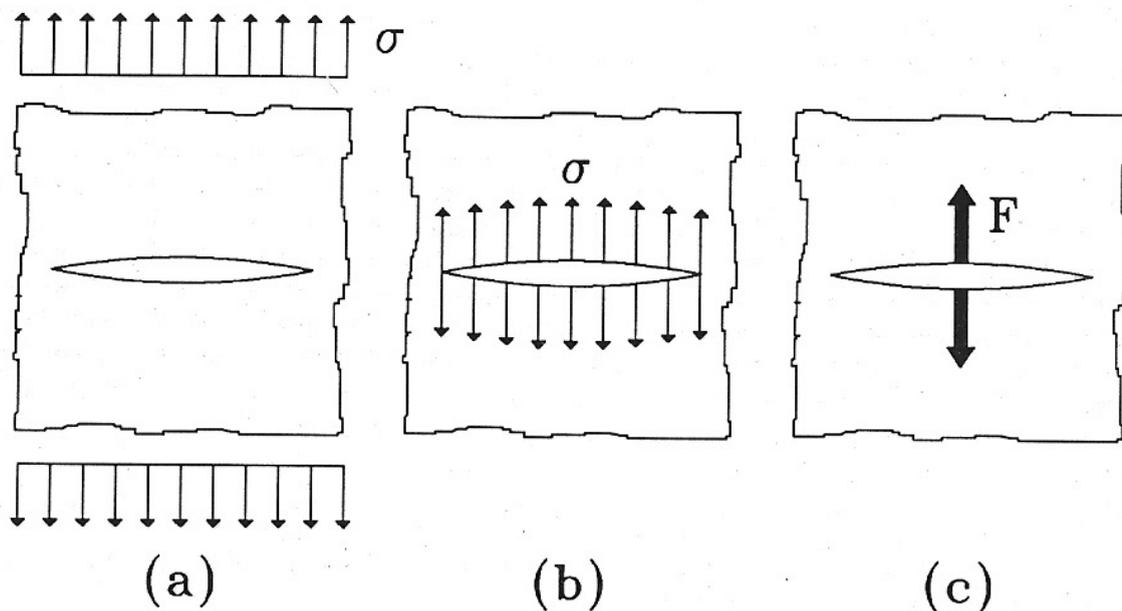


Fig. 3 - Condizioni di carico esaminate

#### APPLICAZIONI

Per valutare l'efficacia del metodo proposto, è stato affrontato il classico problema di un corpo piano infinito con una fessura interna di lunghezza  $2a$  caricata in modo simmetrico. Tale problema offre il vantaggio che la WF teorica è nota:

$$h(x, a) = 2 \cdot \sqrt{\frac{a}{\pi(a^2 - x^2)}} \quad (13)$$

e quindi i risultati del calcolo non sono affetti da errori dovuti all'impiego

di una WF approssimata.

Sono state considerate inoltre tre diverse condizioni di carico (Fig. 3):  
 (a) fessura soggetta ad una tensione uniforme  $\sigma$  applicata all'infinito;  
 (b) fessura soggetta ad una pressione interna uniforme;  
 (c) fessura sollecitata da due forze opposte applicate nella posizione centrale.

Con questa particolare geometria, gli andamenti teorici della tensione all'apice sono noti per le condizioni di carico (a) e (b):

$$\text{caso (a)} \quad \sigma_{yy}(x,a) = \frac{\sigma \cdot x}{\sqrt{x^2 - a^2}} \quad (14a)$$

$$\text{caso (b)} \quad \sigma_{yy}(x,a) = \frac{\sigma \cdot x}{\sqrt{x^2 - a^2}} - \sigma \quad (14b)$$

mentre per il caso (c) gli autori non hanno reperito alcuna soluzione analitica in letteratura.

Lo stato di tensione è stato valutato in una regione che si estende fino ad una distanza dall'apice pari alla semilunghezza di fessura e risultati sufficientemente accurati sono stati ottenuti con i seguenti parametri:  $n=5$  e  $m=20$ .

Nella figura 4 è riportato il confronto tra la tensione esatta e quella ottenuta numericamente che evidenzia il buon accordo reciproco. Questo è confermato anche dalla figura 5 nella quale sono riportate le funzioni di errore  $e_T$  ed  $e_K$  per i casi (a) e (b) e che mostrano valori molto contenuti nell'intero campo di analisi. Nella figura 5 si può inoltre osservare che  $e_K$  è generalmente inferiore a  $e_T$  (più di un ordine di grandezza) ma anche che le due funzioni mostrano lo stesso tipo di variazione (ovvero  $e_K$  risulta maggiore nel caso in cui anche la  $e_T$  assume i valori più elevati). Questa osservazione conferma che, per quanto l'applicazione della funzione  $e_K$  come stima dell'errore in casi

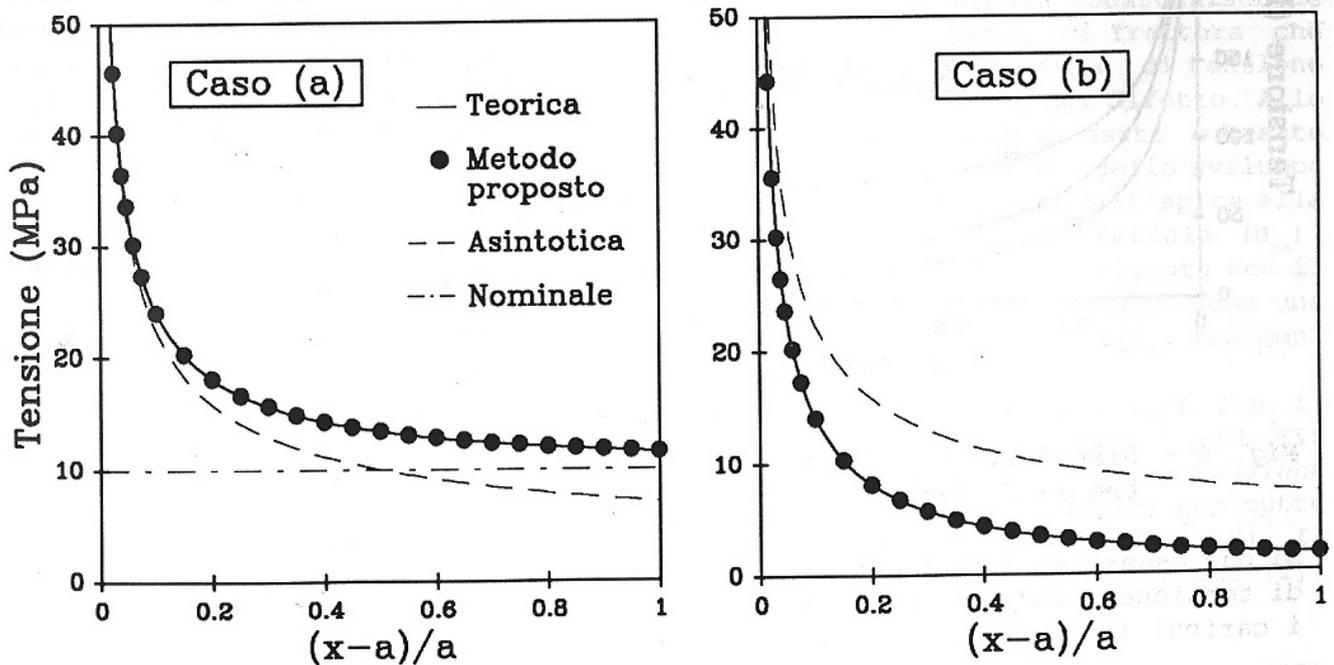


Fig. 4 - Distribuzioni di tensione all'apice della fessura per i casi (a) e (b) ( $\sigma = 10$  MPa,  $a = 10$  mm)

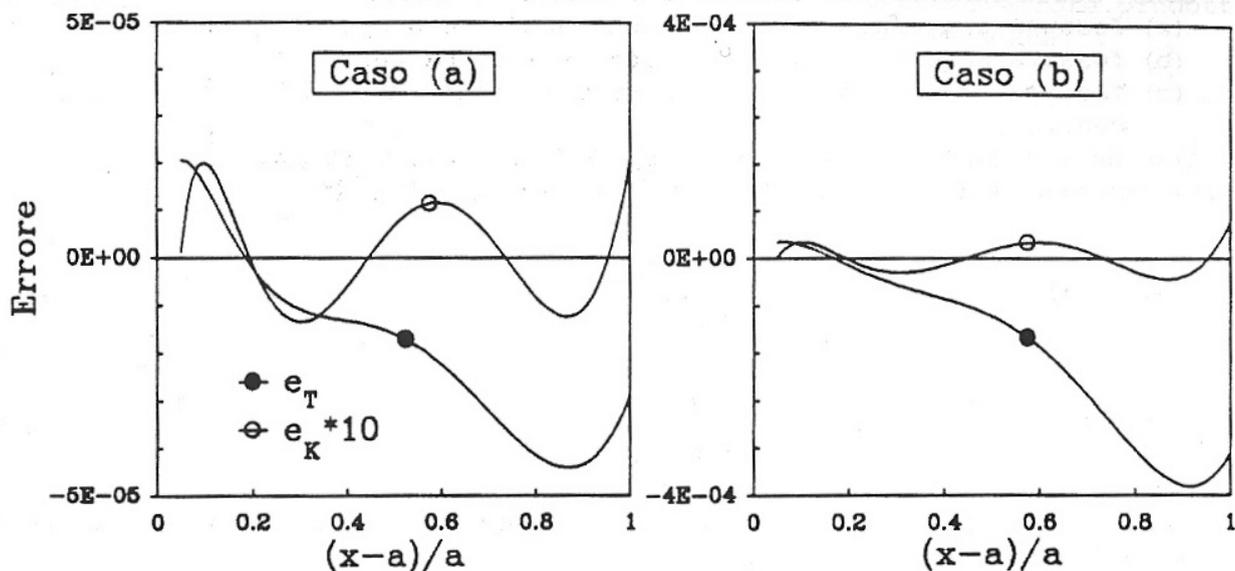


Fig. 5 - Andamento delle funzioni di errore

generali richiede ulteriori indagini, è ragionevole usarla quale parametro di convergenza.

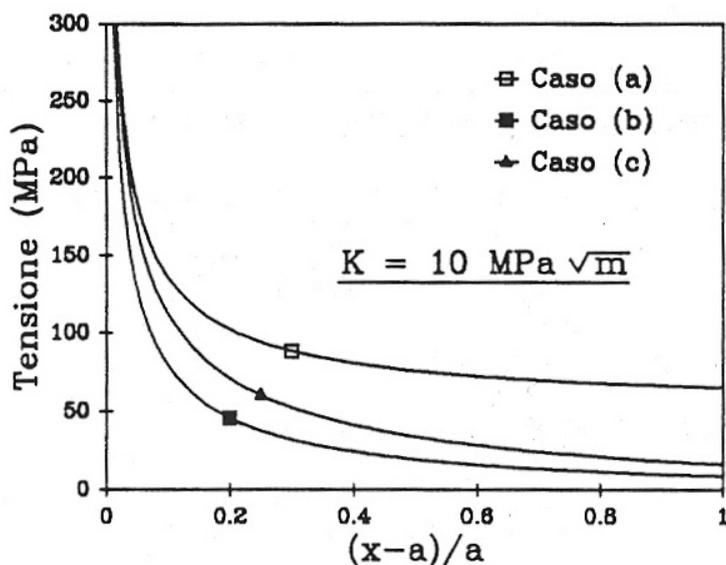


Fig. 6 - Distribuzioni di tensione per i tre casi esaminati

Si può osservare come significative differenze possano esistere tra gli stati di tensione anche considerando la stessa lunghezza di fessura e scegliendo i carichi in modo da produrre il medesimo FIS.

Dalla figura 4 si può osservare anche come la sollecitazione effettiva all'apice possa differire sensibilmente da quella che si calcola sulla base del solo termine singolare dello sviluppo (1) anche ad una distanza relativamente modesta dall'apice del difetto dove il livello locale di tensione è molto più elevato del valore nominale. E' inoltre interessante notare come anche per la medesima geometria, il termine singolare possa sia sovrastimare che sottostimare l'effettivo andamento dello stato di tensione in relazione al tipo di carico applicato.

Nella figura 6 è riportato il confronto tra gli stati di tensione calcolati nei tre casi.

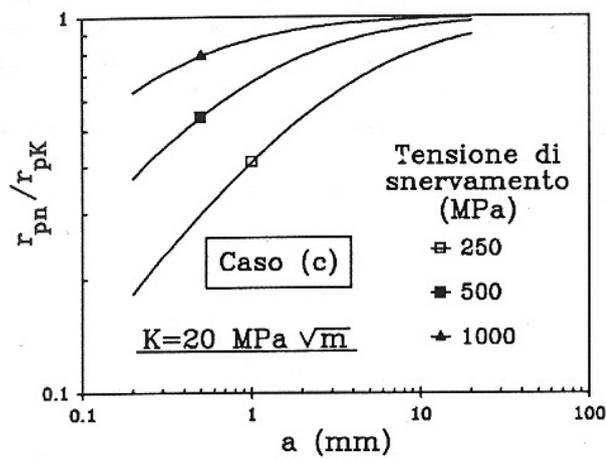
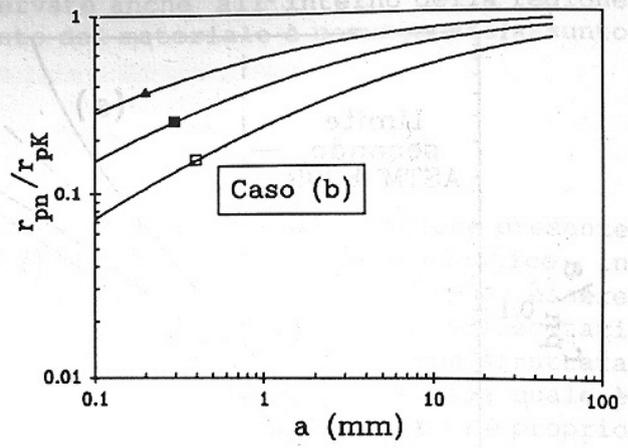
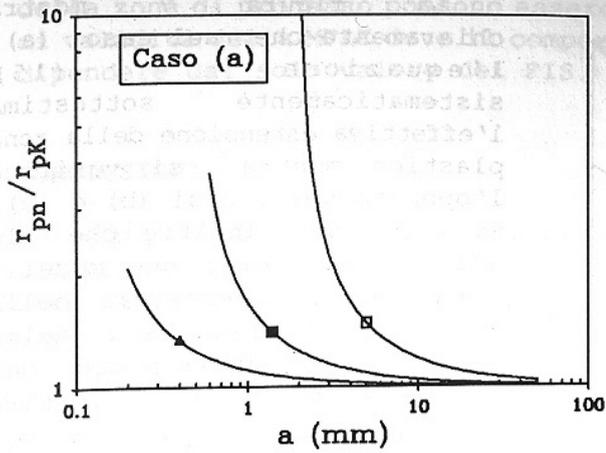


Fig. 7 - Rapporto, a parità di K, tra i raggi plastici valutati con il metodo proposto e quelli basati sul FIS

**UNA SEMPLICE APPLICAZIONE AI CRITERI LOCALI DI FRATTURA**

Come è stato osservato nell'introduzione, il metodo si presta abbastanza bene ad essere impiegato nella applicazione di criteri locali di frattura che generalmente richiedono la determinazione accurata di un livello di tensione in corrispondenza di punti posti a breve distanza dall'apice del difetto. Allo scopo di confrontare il metodo proposto con quello comunemente usato e basato solo sul FIS (ovvero che impiega soltanto il termine asintotico dello sviluppo (1)), è stato scelto come parametro di riferimento la distanza dall'apice alla quale la tensione raggiunge il valore dello snervamento del materiale ( $\sigma_{ys}$ ). Questo parametro che corrisponde al raggio della zona plastica valutata con il modello di Irwin [1], può essere assunto in prima approssimazione come una dimensione caratteristica della zona di processo dove si localizzano i fenomeni di danneggiamento del materiale.

Nella figura 7 è riportato il rapporto tra i raggi plastici calcolati con il presente metodo numerico ( $r_{pn}$ ) e quelli ottenuti sulla base del valore del FIS ( $r_{pK}$ ) in funzione della lunghezza di fessura e per diversi valori della tensione di snervamento. Il carico per i tre casi è stato fissato in modo che per tutte le lunghezze di fessura si avesse il medesimo valore del FIS ( $20 \text{ MPa m}^{1/2}$ ). Il valore di  $r_{pK}$  è stato ottenuto mediante la seguente ben nota relazione [1]:

$$r_{pK} = \frac{1}{2\pi} \cdot \left( \frac{K}{\sigma_{ys}} \right)^2 \tag{15}$$

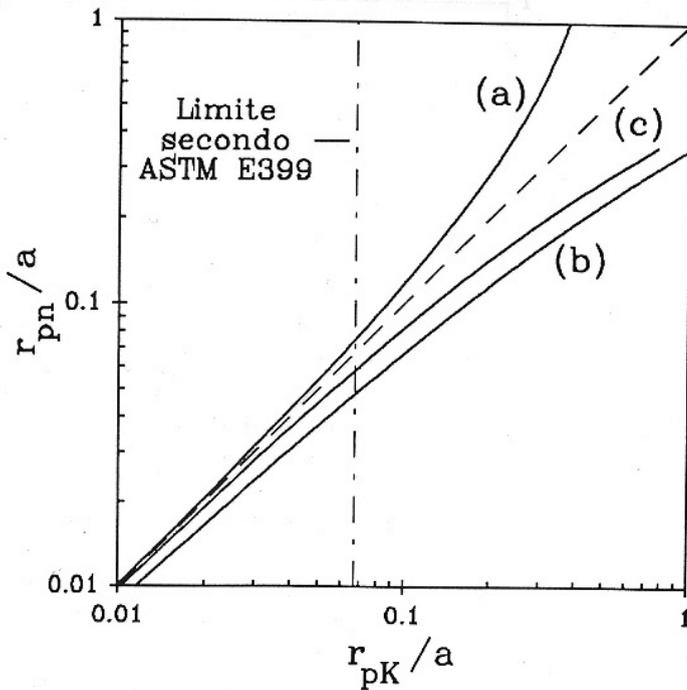


Fig. 8 - Andamento del raggio plastico valutato con il presente metodo in funzione di quello basato sul FIS

La figura 7 mostra chiaramente che, nel caso (a), l'equazione (15) sistematicamente sottostima l'effettiva estensione della zona plastica mentre si verifica l'opposto per i casi (b) e (c). Si osserva inoltre che le differenze tra i due modelli aumentano al decrescere della lunghezza di fessura e della tensione di snervamento del materiale e che significative differenze si hanno anche per valori dei parametri che possono considerarsi tipici per le normali applicazioni. Ad esempio, considerando un materiale con 500 MPa di tensione di snervamento (valore tipico per un acciaio da costruzione) ed una fessura di 5 mm di semilunghezza, il rapporto tra  $r_{pn}$  e  $r_{pK}$  vale circa 1.2, 0.6 e 0.7 rispettivamente per i casi (a), (b) e (c).

Nella figura 8, il raggio plastico calcolato numericamente è riportato in funzione del valore stimato sulla base del solo FIS. Entrambe le grandezze sono state normalizzate rispetto alla dimensione della fessura in modo che per i casi (a) e (b) il legame tra le due grandezze diventa univoco (e non dipende direttamente né da 'a' né dal FIS né da  $\sigma_{ys}$ ). Sebbene questa dipendenza diretta non possa essere analiticamente dimostrata per il caso (c), i valori normalizzati di  $r_{pn}$  e  $r_{pK}$  calcolati separatamente in condizioni molto diverse (ovvero per differenti valori di 'K', 'a' e  $\sigma_{ys}$ ) si sono collocati su una curva unica che è stata riportata in figura. Si deve peraltro osservare che, in generale, il valore del rapporto  $r_{pn}/a$  non può essere considerato una funzione solamente di  $r_{pK}/a$  ma esso dipende esplicitamente anche dagli altri parametri del problema.

La figura 8 mostra che, per i tre casi, le differenze tra i raggi plastici calcolati mediante il modello numerico e quelli ottenuti sulla base del FIS sono funzioni monotone crescenti del rapporto  $r_{pK}/a$ . In particolare, come è da aspettarsi, i due metodi tendono a fornire gli stessi risultati quando la zona plastica diviene trascurabile rispetto alla lunghezza di fessura. Per avere una idea quantitativa dell'entità della zona plastica nei normali problemi pratici di Meccanica della Frattura si può considerare il valore limite imposto dalla norma ASTM E399 per l'applicabilità della MFLE nelle prove di  $K_{Ic}$ . Per il problema esaminato essendo la lunghezza della fessura l'unico parametro geometrico significativo, il limite ASTM può essere scritto come:

$$a > 2.5 \left( \frac{K}{\sigma_{ys}} \right)^2 \quad (16)$$

Dalla figura 8 si può osservare come significative differenze nella stima

della zona di processo possono essere osservate anche all'interno della regione di validità della MFLE dove il comportamento del materiale è comunemente assunto dipendere dal solo valore del FIS.

## CONCLUSIONI

E' stato proposto un metodo per la valutazione dello stato di tensione presente all'apice di fessure in corpi piani con comportamento lineare elastico in condizioni di Modo I di frattura. In queste ipotesi, il metodo può essere applicato a corpi fessurati di geometria comunque complessa e sollecitati in modo qualunque a condizione che sia nota la Weight Function. Viene sfruttata infatti una particolare proprietà delle Weight Function in base alla quale è possibile scrivere una equazione integrale la cui funzione incognita è proprio lo stato di tensione all'apice. Tale equazione integrale è stata risolta mediante un'opportuna tecnica numerica che permette anche di definire un parametro per la stima dell'errore e per il controllo della convergenza.

Il confronto tra i risultati ottenuti numericamente e alcune soluzioni esatte ha dimostrato che il metodo proposto consente di ottenere una accurata previsione dello stato di tensione sia in punti vicini che relativamente lontani dall'apice del difetto. Pertanto, il metodo può essere considerato un valido sostituto delle tecniche numeriche classiche (come gli Elementi Finiti) per la valutazione delle tensioni elastiche in corpi fessurati. A tale proposito è significativo notare che, essendo nota la Weight Function, lo stato di tensione può essere valutato con un impiego di risorse di calcolo molto limitato.

Il metodo è stato applicato per la valutazione approssimata del raggio plastico all'apice di un difetto. Significative differenze sono state osservate tra i raggi plastici per la stessa geometria e con il medesimo valore del Fattore di Intensificazione degli Sforzi quando il tipo di carico è diverso. Nei casi esaminati si è osservato inoltre che la stima numerica del raggio plastico può differire sensibilmente da quella effettuata sulla base del solo Fattore di Intensificazione degli sforzi anche entro i limiti comunemente accettati per la validità della Meccanica della Frattura Lineare Elastica.

## BIBLIOGRAFIA

- [1] M.K.Kanninen and C.H.Popelar, Advanced fracture mechanics, Oxford Engineering Science Series (1985).
- [2] D.Broek, 'Elementary Engineering Fracture Mechanics', Nordhoff Int. Publ., Leyden, The Netherlands (1974).
- [3] H.F.Bueckner, 'A Novel Principle for the Computation of Stress Intensity Factors', *Zeitschrift fur Angewandte Mathematik und Mechanik* **50**, 529-546 (1970).
- [4] J.R.Rice, 'Some Remarks on Elastic Crack Tip Stress Fields', *Int.J.of Solid & Struc.* **8**, 751-758 (1972).
- [5] P.C.Paris, R.M.McMeeking and H.Tada, 'The Weight Function Method for Determining Stress Intensity Factors', ASTM STP 601, 471-489 (1976).
- [6] X.R.Wu and J.Carlsson, 'The generalized weight function method for crack problems with mixed boundary conditions', *J. Mech. Phys. Solids* **31**, 485-497 (1983).
- [7] H.J.Petroski and J.D.Achenbach, 'Computation of the Weight function from a Stress Intensity Factor', *Eng.Fract.Mech.* **10**, 257-266 (1978).
- [8] T.G.Sha, 'Stiffness derivative finite element technique to determine nodal weight functions with singularity elements', *Eng.Fract.Mech.* **19**, 685-699

- (1984).
- [9] T.L.Sham, 'A unified finite element method for determining weight functions in two and three dimensions', *Int. J. Solids Structures* **23**, 1357-1372 (1987).
- [10] M.H.Aliabadi, D.P.Rooke and D.J.Cartwright, 'Mixed-mode Bueckner weight functions using boundary element analysis' *Int. J. Fracture* **34**, 131-147 (1987).
- [11] T.Fett, C.Mattheck and D.Munz, 'Approximate Weight Function for 2D and 3D problems', *Eng.Analysis with Boundary Elements* **6**, 48-63 (1989).
- [12] H.Rajiah and S.N.Atluri, 'Evaluation of K-factor and weight functions for 2-D mixed-mode multiple cracks by the boundary element alternating method', *Eng.Fract.Mech.* **32**, 911-922 (1989).
- [13] E.Vitale, L.Bertini, M.Beghini, 'Weight function determination via simple Finite Element analyses', Proc. of the 5th Int. Conference on 'Numerical Methods in Fracture Mechanics', Ed. A.R.Luxmoore, D.R.J.Owen, Pineridge Press Limited, Mumbles, UK, 645-656 (1990).
- [14] M.Beghini, L.Bertini, E.Vitale, 'Un nuovo metodo per la determinazione di weight functions in problemi bidimensionali', VI Convegno Nazionale del Gruppo Italiano Frattura (IGF), Ancona 1990.
- [15] M.Beghini, L.Bertini, E.Vitale, 'Numerical evaluation of Weight Functions for cylinders with a circumferential through crack', X Congresso Nazionale AIMETA, Pisa 2-5 Ottobre 1990.
- [16] M.Beghini, L.Bertini, E.Vitale 'A numerical approach for determining Weight Functions in Fracture Mechanics', in corso di pubblicazione *Int. J. for Numerical Methods in Engineering*.
- [17] F.G. Tricomi, 'Integral Equations', Interscience Publ. Inc., New York (1957).
- [18] L.M.Delves, J.Walsh, 'Numerical Solution of Integral Equations', Clarendon Press, Oxford (1974).