

STUDIO DEI FATTORI DI INTENSIFICAZIONE DELLE TENSIONI PER CRICCA CHE AVANZA IN UN PANNELLO FORATO MEDIANTE ANALISI FOTOELASTICA

A. Cirello, A. Pasta

*Dipartimento di Meccanica, Università degli studi di Palermo, Viale delle Scienze. -
90128 Palermo (PA), e-mail: cirello@dima.unipa.it, pasta@dima.unipa.it.*

SOMMARIO

Negli ultimi anni si è assistito allo sviluppo di nuovi materiali spesso con composizione tipicamente eterogenea, che unendo le caratteristiche dei materiali componenti producono risultati in termini di prestazione spesso inarrivabili con i materiali tradizionali. L'impiego di questi materiali in molti settori industriali per via delle loro caratteristiche ha prodotto un'intensificazione delle ricerche in special modo nell'ambito delle caratteristiche di resistenza a frattura. Fra i materiali di pratico interesse rivestono una importanza rilevante i materiali compositi e i bimaternali. Nel presente lavoro è stato studiato il comportamento a frattura di un pannello in materiale omogeneo con distribuzione omogenea di vuoti per mezzo di un metodo automatico di analisi fotoelastica appositamente sviluppato. Infine è stato analizzato il caso in cui i vuoti fossero riempiti con un materiale omogeneo con caratteristiche meccaniche diverse rispetto al materiale di base.

ABSTRACT

In the last years the development of 'new' materials often with heterogeneous behavior, that present high mechanical performance often inaccessible to traditional homogeneous ones, have produced a large interest in scientific people, especially in regard to fracture mechanics. The bimaterial system and composite materials are the most used of these materials in practice. In this paper the fracture mechanics behavior of a panel with periodical holes distribution or periodical inclusion distribution has been considered. For experimental test an automatic photoelastic technique has been developed. Finally a panel with rigid inclusions instead of holes has been analyzed.

1. INTRODUZIONE

Nei materiali eterogenei la morfologia microstrutturale riveste una notevole importanza nella determinazione delle caratteristiche meccaniche del materiale. E' quindi importante utilizzare dei modelli che siano quanto più possibile rappresentativi della microstruttura attraverso i quali si possa prevedere il comportamento meccanico globale del materiale. Evidentemente la determinazione della forma, della distribuzione dei difetti, del rapporto volumetrico sono soltanto alcuni dei problemi che devono essere risolti. Sicuramente più complessa è la valutazione dei parametri che determinano il legame interfacciale tra matrice ed inclusioni e come questi possono interferire sul comportamento a frattura del materiale[1,2]. Inoltre è necessario disporre di un metodo utile per la previsione del comportamento a frattura e sicuramente la determinazione del fattore di intensificazione delle tensioni della meccanica della frattura lineare elastica assieme ad un modello di previsione della propagazione del difetto può fornire utili indicazioni. Nella scelta del metodo è da considerare che i modelli numerici

sono semplici da utilizzare ma evidentemente la modellazione di tutti i parametri sopraelencati risulta difficile soprattutto quando la seconda fase presenta una geometria ed una distribuzione casuale. Pertanto è sicuramente utile l'uso di una tecnica sperimentale [3] che anche se applicata a modelli semplici può essere di valido supporto ai metodi numerici [4]. La fotoelasticità è stata negli anni utilizzata con profitto nell'analisi di problemi di meccanica della frattura[5]. Soprattutto la versione digitale sviluppata negli ultimi anni [6,7] ha permesso un approccio semplice del problema della determinazione sperimentale dei parametri di frattura per mezzo di un sistema a campo intero [8]. D'altra parte l'utilizzo diretto su sistemi non birifrangenti è legato a tecniche di tipo a riflessione che presentano spesso difficoltà operative non trascurabili, così spesso si preferisce utilizzare modelli che rappresentano una determinata caratteristica del materiale come ad esempio una sezione. Considerando la resistenza a frattura di materiali ortotropi ed in generale eterogenei alcuni studi teorici sono stati condotti e confrontati con analisi numeriche [9-12]. Per contro soltanto pochi lavori sperimentali sono stati condotti sullo stesso argomento [13]. Il metodo fotoelastica utilizzato si presta bene allo studio in oggetto in quanto permette l'analisi rapida e sufficientemente accurata dei fattori d'intensificazione delle tensioni.

2. IL METODO FOTOELASTICO

In accordo con l'equazione fondamentale della fotoelasticità [14], il ritardo δ delle isocromatiche è legato alla differenza delle tensioni principali nel piano del modello dalla relazione:

$$(\sigma_1 - \sigma_2) = \frac{\delta \lambda}{Cd} \quad (1)$$

essendo λ la lunghezza d'onda della luce monocromatica utilizzata (λ_0 di riferimento), C la costante fotoelastica del materiale costituente il modello e d lo spessore del modello.

In generale il campo tensionale all'apice del difetto è dato da funzioni note dei fattori d'intensificazione delle tensioni (K_I, K_{II}, σ_0), e di r, θ (coordinate polari del generico punto del modello con origine del riferimento sull'apice del difetto Fig. 1).

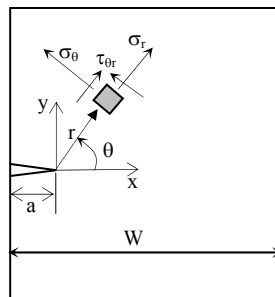


Figura 1: sistema di coordinate all'apice del difetto

Così, definiti con:

$$\begin{aligned} \sigma_x(K_I, K_{II}, \sigma_0, r, \theta) & \text{ tensione secondo l'asse } x \\ \sigma_y(K_I, K_{II}, \sigma_0, r, \theta) & \text{ tensione secondo l'asse } y \\ \tau_{xy}(K_I, K_{II}, \sigma_0, r, \theta) & \text{ tensione tangenziale nel piano } xy \end{aligned} \quad (2)$$

possiamo calcolare la differenza delle tensioni principali al quadrato come:

$$(\sigma_y - \sigma_x)^2 + (2 \cdot \tau_{xy})^2 = (\sigma_1 - \sigma_2)^2 \quad (3)$$

la quantità $(\sigma_1 - \sigma_2)^2$ è ottenuta dalle analisi fotoelastiche tramite l'equazione (1), $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ sono i valori teorici calcolati nei punti con le equazioni (2).

Quindi possiamo scrivere la relazione che lega queste quantità come:

$$f_j(K_I, K_{II}, \sigma_0) = (\sigma_y - \sigma_x)^2 + (2 \cdot \tau_{xy})^2 - (\sigma_1 - \sigma_2)^2 = 0 \quad (4)$$

avendo indicato con j il generico punto. $J = 1, 2, \dots, n$.

Adesso se si fornisce una stima iniziale dei fattori d'intensificazione di tensione, in genere risulta:

$$f_j(K_I, K_{II}, \sigma_0) \neq 0 \quad (5)$$

ma il valore della correzione da apportare si può valutare scrivendo questa funzione in serie di Taylor:

$$(f_j)_{i+1} = (f_j)_i + \left(\frac{\partial f}{\partial K_I} \right)_i * \Delta K_I + \left(\frac{\partial f}{\partial K_{II}} \right)_i * \Delta K_{II} + \left(\frac{\partial f}{\partial \sigma_0} \right)_i * \Delta \sigma_0 \quad (6)$$

ora dovendo essere:

$$(f_j)_{i+1} = 0 \quad (7)$$

per l'i-esima iterazione, si può scrivere la (6) in forma matriciale per gli n punti considerati:

$$\begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \dots \\ \dots \\ f_n \end{pmatrix}_i = - \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial K_I} & \frac{\partial f_1}{\partial K_{II}} & \frac{\partial f_1}{\partial \sigma_0} \\ \frac{\partial f_2}{\partial K_I} & \frac{\partial f_2}{\partial K_{II}} & \frac{\partial f_2}{\partial \sigma_0} \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_n}{\partial K_I} & \frac{\partial f_n}{\partial K_{II}} & \frac{\partial f_n}{\partial \sigma_0} \end{pmatrix}_i * \begin{pmatrix} \Delta K_I \\ \Delta K_{II} \\ \Delta \sigma_0 \end{pmatrix}_i \quad (8)$$

ovvero in forma ridotta:

$$|f| = \|A\| * |\Delta K| \quad (9)$$

Siccome nella totalità dei casi $n > 3$, la matrice $\|A\|$ risulterà non quadrata; allora la soluzione si può determinare attraverso il metodo dei minimi quadrati utilizzando una equazione ausiliaria:

$$\|A\|' * |f| = \|A\|' * \|A\| * |\Delta K| \quad (10)$$

ponendo:

$$\begin{aligned} |d| &= \|A\|' * |f| \\ \|C\| &= \|A\|' * \|A\| \end{aligned} \quad (11)$$

allora l'equazione (10) si scrive:

$$|d| = \|C\| * |\Delta K| \quad (12)$$

la soluzione di questa equazione fornirà i valori di $\Delta K_I, \Delta K_{II}, \Delta \sigma_0$ necessari per la correzione della stima iniziale dei fattori d'intensificazione delle tensioni per la migliore interpolazione della funzione $f_j(K_I, K_{II}, \sigma_0)$ per gli n punti processati.

Il programma messo a punto [8] consente di selezionare gli n punti lungo delle linee anche in numero maggiore di una e di settare per il calcolo descritto tutti i parametri iniziali come la stima iniziale dei fattori d'intensificazione delle tensioni, l'origine del sistema di riferimento, e il valore della correzione ΔK per cui l'algoritmo considera raggiunta la convergenza e presenta i risultati. In generale se i punti sono presi in modo opportuno, generalmente su linee radiali rispetto all'apice del difetto la convergenza viene raggiunta dopo poche iterazioni (<20), altrimenti se l'algoritmo non converge o se il valore di ΔK è stato impostato in modo troppo stringente ($<10^{-5}$) allora il programma provvede ad arrestare il ciclo di iterazioni dopo averne fatte 2000.

3. GEOMETRIA DEI MODELLI

Per lo studio sperimentale sono stati realizzati due modelli in araldite di spessore 9 mm ed aventi le dimensioni pari a $L = 200$ mm e $W = 50$ mm (Fig 2), entrambi i modelli sono stati forati con punte da metallo, utilizzando una bassa velocità di rotazione in modo da evitare la formazione di tensioni residue. I fori praticati presentano un diametro $d = 10$ mm con passo p pari a 25 mm per un totale di 16 fori per ogni modello ed un rapporto $d/p = 0.4$. I fori alle estremità sono stati utilizzati per fissare il sistema di carico utilizzando delle boccole per evitare un'eccessiva concentrazione delle tensioni. Al fine di ottenere una distribuzione del carico quanto più uniforme possibile il provino è stato collegato all'apparecchio di carico per mezzo di bielle con un sistema 2 in 1. Nei fori di uno dei provini sono stati quindi inseriti dei cilindri pieni di alluminio 2024 T3 utilizzando Araldite D come collante (Fig. 2b).

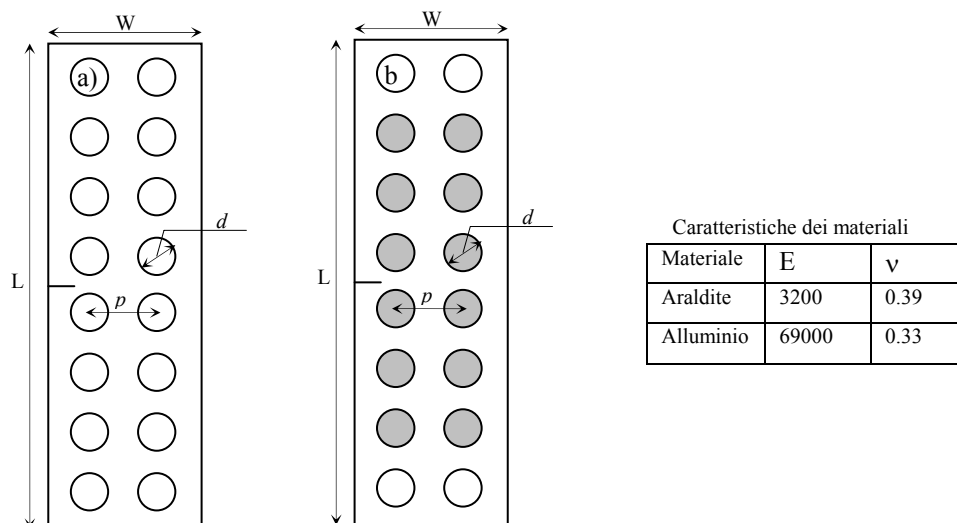


Fig. 2 – geometria dei provini: a) Provino con fori, b) provino con cilindri d'alluminio

Quindi su entrambi i provini si è provveduto a creare un difetto laterale di lunghezza iniziale pari a circa 4 mm per mezzo di una sega a nastro con lama di spessore 0.3 mm e dentatura piccola del tipo utilizzata per il taglio di metalli preziosi, quindi si è provveduto a realizzare l'intaglio a V per mezzo di una lama liscia dello stesso spessore della sega ma con taglio a V di apertura pari a circa 60° . L'utilizzo di questa procedura ha permesso di ottenere difetti molto regolari e con apice appuntito (Fig. 3) che presentano un ordine della singolarità pari a 0.5 come d'altra parte previsto dalla teoria e verificato sperimentalmente su un provino rettangolare sottoposto a modo I di apertura.

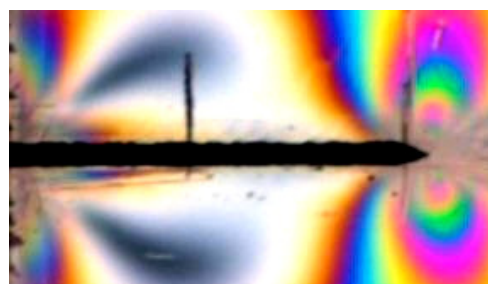


Fig. 3 – Particolare del difetto

4. LE PROVE SPERIMENTALI

Per l'analisi fotoelastica i modelli sono stati inseriti in un polariscopio circolare a campo scuro Tiedemann. Entrambi i provini sono stati caricati a trazione con un carico di 402 N per una tensione remota pari a 0.9 MPa. Si è proseguito quindi ad una serie di avanzamenti del difetto, ciascuno della lunghezza di circa 2 mm. Ogni avanzamento è stato misurato in modo preciso con un ingrandimento fotografico con una precisione di 0.05 mm (dimensione del pixel). Il sistema per l'analisi fotoelastica è composto dal polariscopio, da una fotocamera digitale Nikon D1 con risoluzione pari a 2000x1312 pixel e da un computer che gestisce l'acquisizione e l'elaborazione delle immagini (Fig. 4). Tramite l'utilizzo di un obiettivo Nikkor 60mm si è arrivati ad un fattore di scala pari a 0.05 mm/pixel.

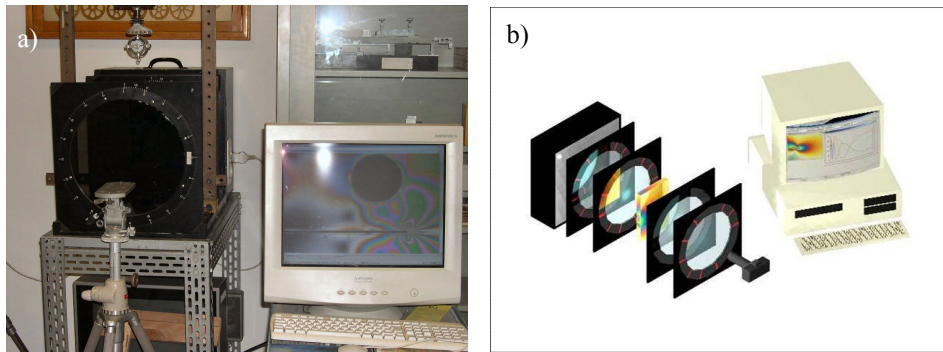


Fig. 4 – a) Sistema di elaborazione, b) schema funzionale

Preliminarmente all'analisi dei modelli oggetto di studio il sistema di acquisizione ed elaborazione delle immagini è stato messo a punto su di un modello di forma rettangolare in materiale omogeneo con intaglio laterale e rapporto a/W pari a 0.25 sottoposto al solo modo I di apertura avendo indicato con a la lunghezza del difetto e con W la larghezza del modello. Il Valore di K_I rilevato sperimentalmente, utilizzando i punti giacenti su due linee radiali ed inclinate simmetricamente di 60° circa (riportate in nero in fig. 5), è risultato pari a $12.35 \text{ N/mm}^{3/2}$ (Fig. 5)

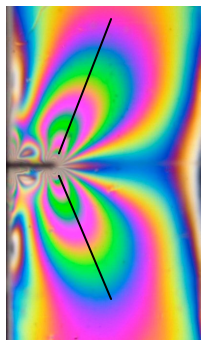


Fig. 5 – Frange fotoelastiche del provino omogeneo sottoposto trazione pura

con un errore rispetto al valore calcolato teoricamente con l'eq. (13) [15] inferiore all'1%.

$$K_I = \beta \sigma \sqrt{\pi a} \quad (13)$$

Essendo β :

$$\beta = 1.12 - 0.23 \left(\frac{a}{W} \right) + 10.6 \left(\frac{a}{W} \right)^2 - 21.7 \left(\frac{a}{W} \right)^3 + 30.4 \left(\frac{a}{W} \right)^4 \quad (14)$$

A conferma della bontà del risultato ottenuto è stato misurato l'ordine della singolarità lungo la stessa linea risultando pari a 0.508 (Fig. 6) a fronte di un valore teorico pari a 0.5 con un errore pari a 1.6%. Si è proseguito quindi alle analisi delle immagini dei modelli oggetto di studio.

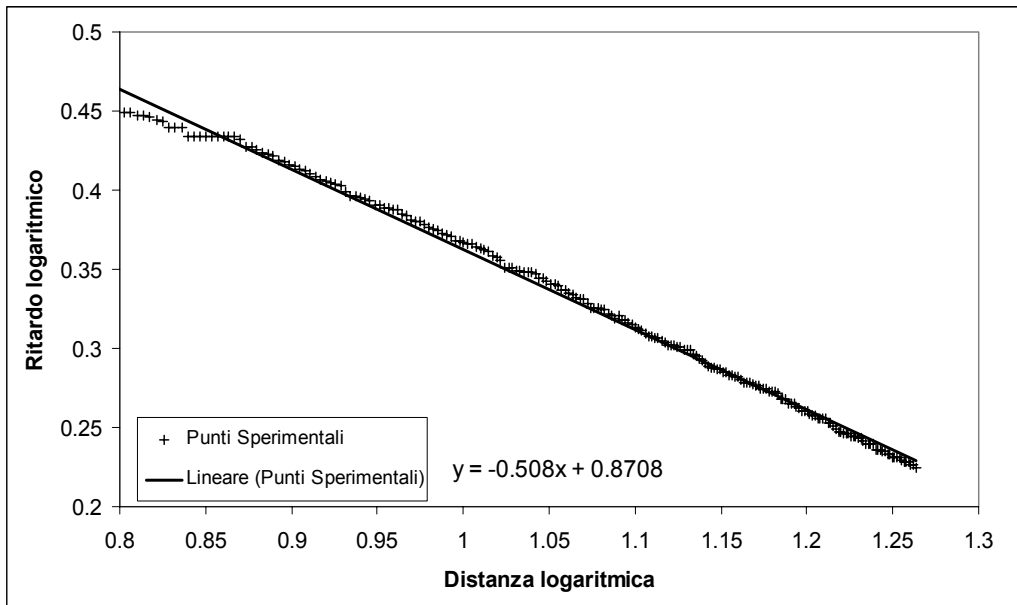


Fig. 6 – Andamento del ritardo logaritmico lungo la linea di calcolo

Ogni immagine acquisita è stata analizzata utilizzando, per il calcolo del fattore d'intensificazione delle tensioni, punti giacenti su linee radiali in numero almeno pari a quattro e simmetriche rispetto al piano del difetto (considerando il sistema di riferimento centrato sull'apice del difetto).

I valori del fattore d'intensificazione così ottenuti sono stati resi dimensionali dividendoli per il valore di K_0 calcolato con la (15).

$$K_0 = \sigma \sqrt{\pi a} \quad (15)$$

In figura 7 sono mostrate le frange isocromatiche a campo intero dei due modelli presi in esame all'inizio della prova rispettivamente nella figura 7a quelle relative al provino con distribuzione di fori ed in figura 7b quelle relative al provino con inclusioni rigide e con la stessa sequenza quelle relative all'ultimo valore di a/W pari a circa 0.5.

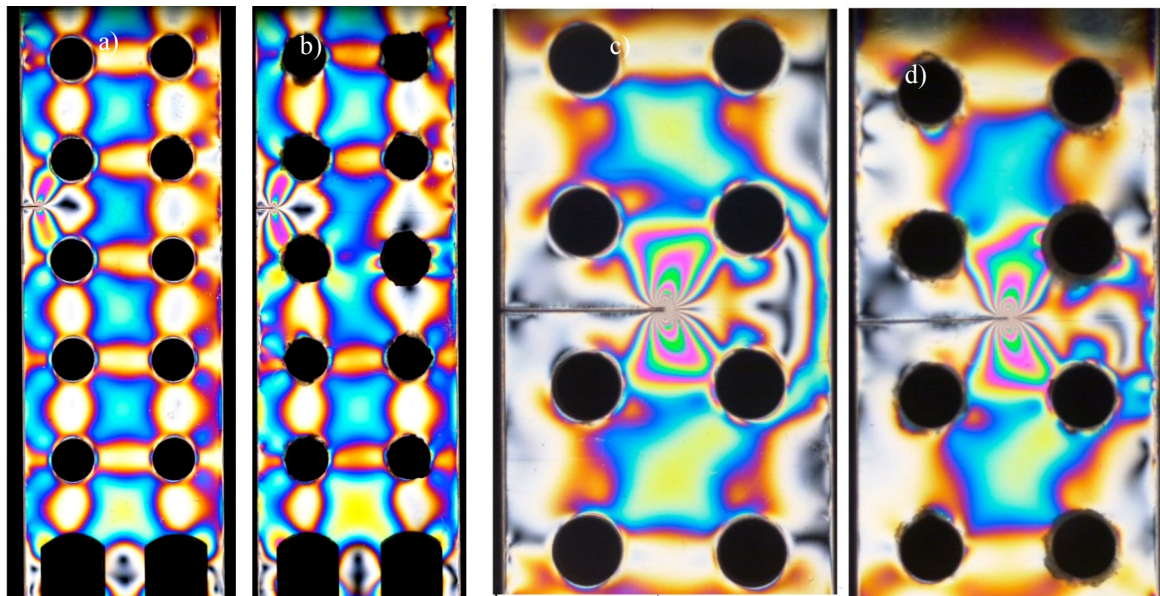


Fig. 7 – Isocromatiche in luce bianca dei provini all'inizio della prova; a) modello con fori $a/W=0.1$, b) modello con inclusioni rigide $a/W=0.1$, c) provino con foro $a/W=0.5$, d) provino con inclusioni $a/W=0.5$

Dall'analisi delle immagini si può notare come l'andamento delle frange sia simile a testimonianza del fatto che il carico viene trasferito con le stesse modalità nei due casi sia all'inizio della prova che alla fine.

In figura 8 sono mostrate a titolo di esempio le isocromatiche in luce bianca del provino con distribuzione di fori per valori di $a/W = 0.22, 0.3, 0.4$.

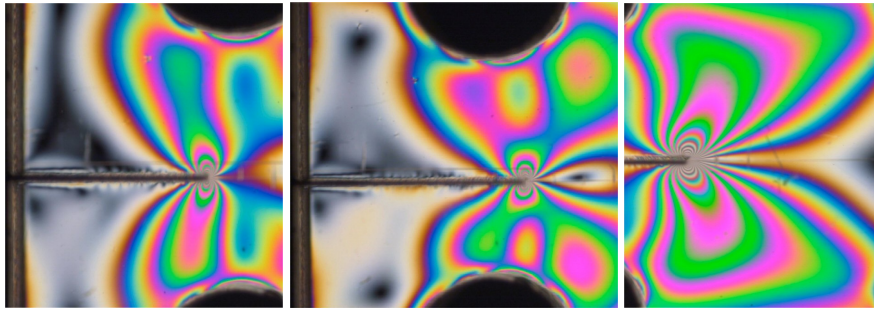


Fig. 8 – Isocromatiche in luce bianca dei provini fori a) $a/W = 0.22$, b) $a/W = 0.3$, c) $a/W = 0.4$.

5. RISULTATI

In figura 9 sono mostrati i valori del rapporto K_I/K_0 in funzione di a/W dei due modelli analizzati insieme alla curva analitica ottenuta con l'eq. (13) relativa ad un provino omogeneo di ugual geometria.

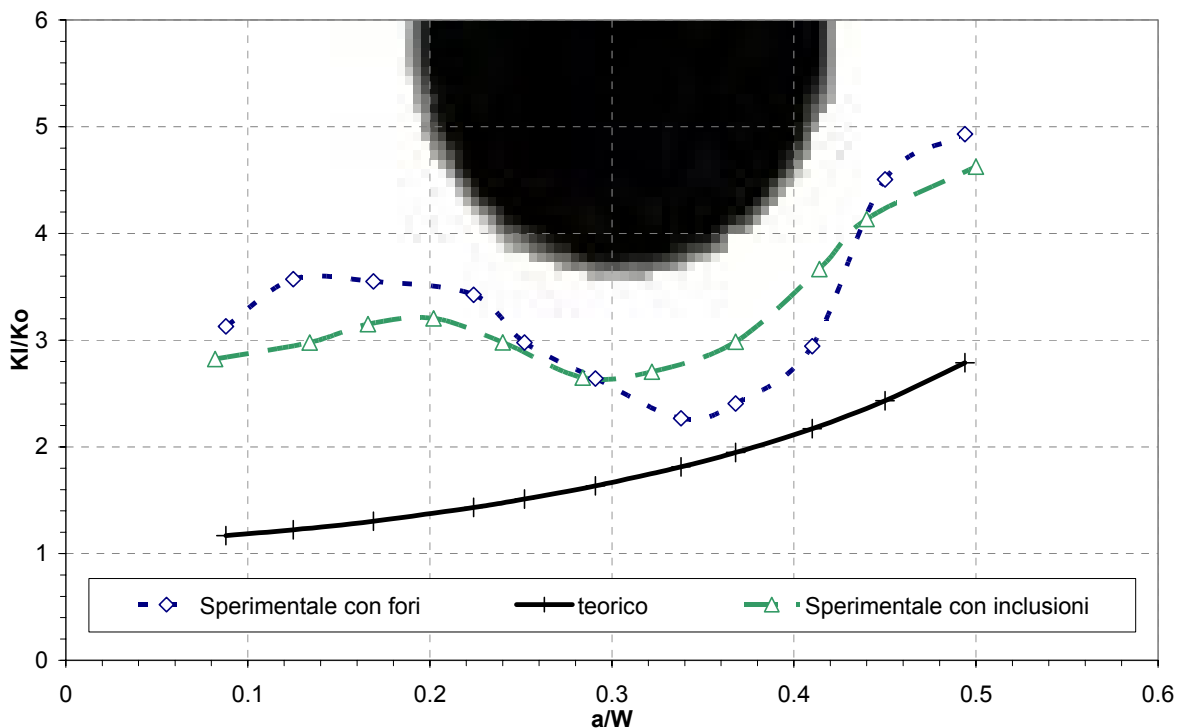


Fig. 9 – Andamento del rapporto K_I/K_0 al variare di a/W

Come si può notare entrambe le curve sperimentali mostrano valori del rapporto K_I/K_0 sempre maggiori rispetto a quello calcolato per il provino integro. Quindi la presenza di fori o di inclusioni comporta una situazione più gravosa rispetto al caso di provino integro per tutti i valori di a/W analizzati. In secondo luogo si può notare come l'andamento qualitativo dei due casi studiati sia fondamentalmente uguale. Si nota inoltre come la curva relativa al caso di provino con distribuzione dei fori presenta una maggiore riduzione del valore di K_I per effetto della presenza del foro e si nota anche l'effetto della concentrazione delle tensioni per valori di a/W relativi a zone di materiale che si trovano in direzione verticale fuori dai fori. Viceversa sotto i fori l'effetto di scaricamento dovuto alle discontinuità risulta preponderante portando il valore del fattore d'intensificazione delle tensioni ad un valore più basso rispetto all'analogo ottenuto nel modello con le inclusioni rigide. In generale si può

affermare che le inclusioni rigide portano ad una variazione del valore di K_I minore rispetto all'analoga situazione relativa alla presenza di fori quindi si possono considerare migliorativi in termini di resistenza a frattura del materiale nel suo insieme. Il sistema rappresentato dal modello con le inclusioni rigide può essere assimilato alla sezione di un composito unidirezionale sollecitato da un carico trasversale del tipo fibra di vetro in matrice epossidica avendo le stesse costanti α e β definite da Dundurs come [16].

$$\alpha = \frac{E_1 - E_2}{E_1 + E_2}; \quad \beta = \frac{G_2 / G_1 (k_1 - 1) - (k_2 - 1)}{G_2 / G_1 (k_1 + 1) + (k_2 + 1)} \quad (16)$$

Quindi è possibile affermare che in questo tipo di materiali la discontinuità dovuta alla presenza di vuoti risulta verosimilmente essere più gravosa di quella relativa alla presenza di un altro materiale per difetti che propagano all'interno della matrice.

6. CONCLUSIONI

Nel presente lavoro è stato studiato l'evoluzione di un difetto che propagandosi da un bordo libero attraversa in modo regolare un pannello con distribuzione regolare di fori o inclusioni. Il metodo fotoelastico utilizzato, messo a punto presso il Dipartimento di Meccanica dell'Università di Palermo ha permesso in tempi rapidi e con sufficiente precisione l'analisi dell'andamento del fattore d'intensificazione delle tensioni. Tale andamento ha permesso di investigare circa i diversi effetti prodotti dalle due discontinuità studiate.

Alla luce dei risultati ottenuti si può affermare che la discontinuità dovuta ai fori risulta più gravosa in termini di resistenza a frattura di quella relativa alla presenza di inclusioni rigide. Allo stesso tempo è stato possibile affermare come in nessun caso il fattore d'intensificazione delle tensioni risulta più basso di quello relativo al materiale integro. L'estensione dei risultati ai materiali compositi unidirezionali anche se lecita necessita ovviamente di ulteriori indagini sperimentali.

BIBLIOGRAFIA

- [1] A.G. Evans, "Perspective on the development of high-toughness ceramics", *J. Am. Ceram. Soc.*, Vol. 73, 2, 1990, pp.187-206 (Journal)
- [2] R. Stevens, Zirconia and zirconia ceramics, Magnesium Elektron Ltd, 1986 (book)
- [3] A. Cirello, "Elaborazione automatica d'immagini fotoelastiche per la determinazione dei fattori d'intensificazione delle tensioni", *Tesi di Laurea Palermo 1999*
- [4] C. Maletta "Sviluppo di metodi per l'analisi numerica di materiali eterogenei", Tesi di dottorato in ingegneria dei materiali e delle strutture, Università della Calabria, Dicembre 2005.
- [5] K. Ramesh, S. Gupta, A.A. Kelkar, "Evaluation of stress field parameters in fracture mechanics by photoelasticity revised", *Engineering Fracture Mechanics*, Vol. 56, 1, 1997, pp.25-45 (Journal)
- [6] Ajovalasit, A., Barone, S., Petrucci, G., "Toward RGB photoelasticity-full field photoelasticity in white light", *Exp. Mech.*, 35, 193-200, 1995. (Journal)
- [7] J.W. Dally., Experimental Stress Analysis, New York: McGraw-Hill; 1991. (Journal)
- [8] A. Cirello, "L'elaborazione automatica delle immagini nello studio dei fattori di intensificazione delle tensioni" *Tesi di Dottorato in Costruzioni Meccaniche*, Palermo, 2003.
- [9] Zak, A.R., Williams, M.L., "Crack point stress singularities at a bimaterial interface", *J. of Appl. Mech.*, 30, pp.142-143, 1963. (Journal)
- [10] Bogy, D.B., "On the plane elastostatic problem of a loaded crack terminating at a bimaterial interface", *J. of Appl. Mech.*, 38, pp.911-918, 1971 (Journal)
- [11] Ashbaugh, N.E., "Stress solution for a crack at an arbitrary angle to an interface", *Int. J. Fract.*, 11, pp.205-219, 1975 (Journal)
- [12] Lin, K.Y., Mar, J.W., "Finite element analysis of stress intensity factors for crack at bimaterial interface", *Int. J. Fract.*, 12, pp. 521-531, 1976 (Journal)
- [13] A. Cirello B. Zuccarello, "On the effect of a crack propagating toward the interface of a bimaterial system", *Engineering Fracture Mechanics*, 73, pp. 1264-1277, 2006 (Journal)
- [14] Kuske, A., Robertson, G., Photoelastic Stress Analysis, John Wiley & Sons, Bristol, 1974. (Book)
- [15] D.P. Rooke, D.J. Cartwright, Stress intensity factors, HMSO, 1976 (Book)
- [16] Dundurs, "discussion", *J. of Appl. Mech.*, 36, pp. 650-652, 1969. (Journal)