

## PROBLEMI DI DELAMINAZIONE ALL'INTERFACCIA IN LAMINATI CURVI

D.Bruno<sup>a</sup>, R. Carpino<sup>a</sup>, P. Nevone Blasi<sup>a</sup>

<sup>a</sup> *Dipartimento di Strutture, Università della Calabria, Ponte P. Bucci 39B - 87036 Arcavacata di Rende (CS), e-mail: [d.bruno@unical.it](mailto:d.bruno@unical.it), [r.carpino@strutture.unical.it](mailto:r.carpino@strutture.unical.it), [p.nevone@strutture.unical.it](mailto:p.nevone@strutture.unical.it).*

### SOMMARIO

Il presente lavoro riguarda lo sviluppo e l'applicazione di una tecnica per l'analisi della propagazione del danneggiamento interlaminare in travi laminate curve, soggette a condizioni di carico da modo misto. La struttura in questione viene schematizzata adottando un semplice modello composto da due travi curve ortotrope, con deformabilità tagliante al primo ordine, unite da elementi di interfaccia curvi e "collassati". Nell'interfaccia "collassata", la condizione di perfetta adesione degli elementi è imposta direttamente sugli spostamenti per mezzo dei moltiplicatori di Lagrange. La soluzione in forma chiusa ottenuta per questa semplice configurazione, in termini di energia di rilascio totale e sue componenti modali, utilizza la nozione di discontinuità delle sollecitazioni al tip; a tal fine occorre risolvere il sistema delle equazioni indefinite di equilibrio con condizioni al contorno e di compatibilità, in termini di spostamenti generalizzati. La tecnica proposta risulta utile in vista di una metodologia progettuale che metta in conto la possibilità del modo di collasso per distacco provocato dalla frattura all'interfaccia.

### ABSTRACT

This work deals with the development and application of a technique for the analysis of interlaminar crack growth in composite curved beams, subjected to mixed-mode loading conditions. The structure has been modeled by adopting two first-order shear deformable curved orthotropic beams model, joined by a curved "collapsed" interface. At the "collapsed" interfaces, the connection between beam elements is imposed by the Lagrange multiplier method. Closed form solutions are discussed for the simpler two-beam model configuration, in which the total and individual mode components of energy release rates, are evaluated by means of tip stress resultant jumps. To this end governing equations for displacement fields, along with boundary and matching conditions, have been resolved. The proposed technique is able to taking into account properly of debonding failure modes triggered by interface fracture in composite curved beams.

### 1. INTRODUZIONE

Le attuali applicazioni strutturali dei materiali compositi, in configurazione curva, riguardano, principalmente, la realizzazione di parti o strutture, nei campi dell'ingegneria aerospaziale e meccanica. Nell'ambito dell'ingegneria civile, tali materiali sono usati a supporto della struttura originaria nella riabilitazione strutturale, utilizzando lamine in composito che possono intervenire all'inizio o durante le condizioni critiche di carico. Le incertezze nella progettazione dovute alle difficoltà di modellazione del comportamento meccanico del materiale, in relazione alle diverse modalità di danneggiamento, portano a non poter sfruttare al massimo le potenzialità dei compositi. Una tipica rottura locale, che per evoluzione determina meccanismi globali di danneggiamento, è il fenomeno della delaminazione. Tale

modalità di rottura, si sviluppa da un difetto iniziale fra le lamine che, successivamente, procede lungo l'intera lunghezza del laminato. Le strutture laminate in configurazione curva, sono molto vulnerabili per frattura di interfaccia, infatti, la combinazione delle discontinuità geometriche e del materiale, in aggiunta agli effetti della curvatura, accrescono la vulnerabilità alla delaminazione [1]. La propagazione di una frattura di interfaccia, in strutture laminate curve, può portare a collasso locale e globale della stessa. Tale fenomeno, nel contesto di piastre o travi laminate, è stato analizzato usando sia la Meccanica del Danneggiamento [2], sia i concetti della Meccanica della Frattura [3], [4], [5].

La trave laminata curva contenente il difetto di interfaccia è stata modellata con la interconnessione di due travi mediante un'interfaccia. Gli effetti combinati delle deformazioni assiali, flessionali e taglianti, sono stati messi in conto adottando, per ogni trave, una teoria dei laminati curvi con deformabilità tagliante al primo ordine. L'interfaccia è stata simulata per mezzo di un vincolo interno che assicura la continuità degli spostamenti tra le travi, nella zona non delaminata; tale vincolo è stato imposto mediante il metodo dei moltiplicatori di Lagrange. Per prevedere la propagazione della frattura, è necessario il calcolo dell'energia di rilascio totale, ERR, nonché delle sue componenti associate direttamente ai singoli modi di avanzamento della frattura.

In letteratura sono stati dedicati pochi lavori ai modelli di delaminazione per travi laminate curve, specialmente in condizioni di modo misto. Il calcolo dell'energia di rilascio è stato effettuato usando elementi finiti piani o solidi ed i concetti della meccanica della frattura [6]. L'energia di rilascio totale è stata calcolata in [7] a partire dal campo tensionale locale usando elementi finiti in stato piano di tensione. In ogni caso la ricostruzione del campo tensionale singolare all'intorno del vertice della frattura, richiede una densa discretizzazione in elementi finiti. Per questi motivi, come si evince in [5] e [9], devono essere investigati modelli basati sulla teoria delle travi o delle piastre, che possono più convenientemente essere usati al posto di un approccio al continuo.

Nel presente lavoro le componenti modali dell'energia di rilascio, verranno calcolate, in termini di discontinuità delle sollecitazioni, utilizzando concetti mutuati dalla tecnica della chiusura virtuale, VCCT. In seguito per mezzo di un'approccio energetico globale ([5], [8]) che utilizza i concetti di variazioni su domini mobili, si calcola l'energia di rilascio totale in termini di discontinuità delle sollecitazioni nel fronte di avanzamento del difetto.

## 2. MODELLO A DUE TRAVI CURVE CON FRATTURA DI INTERFACCIA

Consideriamo adesso il problema di frattura piano, mostrato in Fig. 1, dove una frattura è stata posizionata arbitrariamente in un'interfaccia, di spessore trascurabile, tra due travi laminate a curvatura costante e di spessori  $t_1$  per quella inferiore e  $t_2$  per quella superiore. Il modello viene descritto introducendo un sistema di coordinate cilindriche nel quale  $r$  e  $\theta$  sono, rispettivamente, le coordinate radiali e circonferenziali riferite ai piani medi delle singole travi e  $z$  la direzione attraverso lo spessore della trave. La delaminazione è posizionata nel piano curvo individuato da  $r=R_D$ . La dimensione circonferenziale della trave è uguale a  $\theta_T$  e la dimensione della zona di estensione della frattura è uguale a  $\theta_D$ . Entrambe le travi sono composte da materiale elastico lineare omogeneo e cilindricamente ortotropo.

Ogni trave curva può rappresentare un singolo laminato o un assemblaggio di strati trattati con la teoria del singolo laminato equivalente, perciò, nel legame costitutivo è incorporato l'accoppiamento del materiale. Per conseguenza, nelle due travi curve le risultanti delle forze assiali  $N_i$ , momenti flettenti  $M_i$  e forze di taglio  $T_i$  per unità di spessore, possono essere messe in relazione con le deformazioni assiali  $\varepsilon_i$ , le curvature  $\kappa_i$  e gli scorrimenti trasversali  $\gamma_i$  per mezzo dei termini classici di rigidezza estensionale  $A_i$ , accoppiamento assiale-flessionale  $B_i$  e rigidezza flessionale  $D_i$ , nella forma seguente:

$$\begin{Bmatrix} N_i \\ M_i \\ T_i \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_i & B_i & 0 \\ B_i & D_i & 0 \\ 0 & 0 & H_i \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_i \\ \kappa_i \\ \gamma_i \end{Bmatrix} \quad (1)$$

dove, per la trave cilindricamente ortotropa costituita da  $n_j$  laminati e con moderata curvatura, le rigidezze  $A_i$ ,  $B_i$ ,  $D_i$  e  $H_i$  possono essere calcolate e poste in modo sintetico nella seguente forma:

$$(A_i, B_i, D_i) = \sum_{k=1}^{n_j} \int_{z_{k-1}}^{z_k} E_j^k \cdot (1, z, z^2) \cdot dz, \quad H_i = \sum_{k=1}^{n_j} \int_{z_{k-1}}^{z_k} f \cdot G_j^k dz \quad (2)$$

dove per ogni laminato  $j$  afferente alla trave  $i$ , assunto uno stato piano di tensione,  $E_j$  è il modulo di elasticità normale,  $G_j$  è il modulo trasversale o di taglio che è direttamente legato ad  $E_j$  per materiali isotropi mentre, per materiali ortotropi, dipende dal volume di composito immerso nella matrice. Quando il laminato è costituito da un singolo strato,  $f$  si pone pari a  $5/6$  e le espressioni al punto (2), diventano:

$$A_j = E_j t_j, \quad D_j = \frac{E_j t_j^3}{12}, \quad B_j = 0, \quad H_j = \frac{5}{6} G_j t_j$$

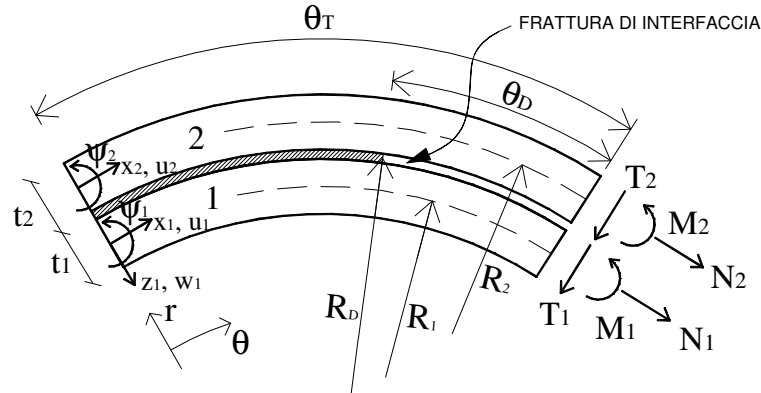


Fig. 1 – Trave curva laminata contenente una delaminazione

In un punto arbitrario dell'elemento di trave gli spostamenti nella direzione positiva degli assi  $x$ ,  $z$  sono chiamati rispettivamente  $\bar{u}_i$  e  $\bar{w}_i$ , mentre  $\psi_i$  indica la rotazione della sezione trasversale nel piano  $x$ - $z$ . Il modello meccanico di trave curva tiene conto della deformazione assiale flessionale e tagliante contenute nel piano della trave stessa. Per tale scopo è stata adottata la teoria dei gusci in laminato composito, adattata al caso delle travi curve, la quale contiene la teoria della deformabilità del taglio al primo ordine come caso particolare. Il campo di spostamenti e il relativo campo di deformazioni, nel sistema di coordinate cilindrico, possono essere scritti come:

$$\begin{aligned} \bar{u}_i(x, z) &= u_i(x_i) + z_i \psi_i(x_i) \\ \bar{w}_i(x, z) &= w_i(x_i) \end{aligned}, \quad \varepsilon_i = \frac{u_i'}{R_i} - \frac{w_i}{R_i}, \quad \kappa_i = \frac{\psi_i'}{R_i}, \quad \gamma_i = \frac{w_i'}{R_i} + \frac{u_i}{R_i} + \psi_i \quad (3)$$

dove, l'apice indica la derivata rispetto a  $\theta$ ,  $R_i$  è il raggio di curvatura della generica trave curva e valgono le relazioni  $x_i = R_i \theta_i$  e  $z_i = R_i - r$ . Infine, il vincolo di perfetta adesione che c'è nella zona in cui sussiste la perfetta adesione tra le travi,  $0 \leq \theta \leq (\theta_T - \theta_D)$ , viene ottenuto introducendo i moltiplicatori di Lagrange i quali rappresentano direttamente le tensioni di interfaccia; le relative equazioni di vincolo interno sono:

$$\begin{aligned} \Delta u &= u_1 - \frac{t_1}{2} \psi_1 - u_2 - \frac{t_2}{2} \psi_2 = 0 \\ \Delta w &= w_1 - w_2 = 0 \end{aligned}, \quad (4)$$

con le quali il numero di variabili generalizzate si riduce da 6 a 4.

### 3. FORMULAZIONE ANALITICA DEL PROBLEMA DELLA DELAMINAZIONE

Per ottenere l'espressione in forma chiusa dell'ERR in termini di discontinuità delle sollecitazioni al fronte, occorre risolvere il problema differenziale, con condizioni al contorno, dato dalle equazioni di equilibrio del problema, in termini di variabili spostamento. Come vedremo alla fine, il modello di delaminazione descritto qui da due sole travi, rispetto a modelli accurati al continuo, induce delle approssimazioni sulla valutazione dell'ERR totale che sono ragionevoli. In effetti, invece, data la natura continua del problema della partizione modale, un calcolo accettabile delle singole componenti, richiede un modello più raffinato in cui, ognuna delle due travi laminate e separate dal piano di

delaminazione, viene descritta con più di una trave matematica. Si introduce adesso il seguente funzionale energetico  $\Pi$

$$\Pi = U + \Lambda - W, \quad (5)$$

dove  $U$  è l'energia di deformazione dell'intero sistema strutturale,  $\Lambda$  è il funzionale di Lagrange che impone la continuità degli spostamenti nell'interfaccia e  $W$  è il lavoro fatto dai carichi applicati. Le equazioni di equilibrio possono essere ottenute annullando la variazione prima di  $\Pi$ , corrispondente a una variazione degli spostamenti generalizzati delle travi e dei moltiplicatori di Lagrange nell'interfaccia, ovvero

$$\delta U + \delta \Lambda - \delta W = 0. \quad (6)$$

La variazione prima dell'energia di deformazione è

$$\delta U = \int_0^{\theta_T} [N_1 \delta \varepsilon_1 + M_1 \delta \kappa_1 + T_1 \delta \gamma_1] R_1 d\theta + \int_0^{\theta_T} [N_2 \delta \varepsilon_2 + M_2 \delta \kappa_2 + T_2 \delta \gamma_2] R_2 d\theta \quad (7)$$

mentre, la variazione del funzionale di Lagrange relativa alla continuità degli spostamenti di interfaccia può essere espressa come

$$\delta \Lambda = \int_0^{\theta_T} [\tau \delta \Delta u + \sigma \delta \Delta w + \delta \tau \Delta u + \delta \sigma \Delta w] R_D d\theta \quad (8)$$

dove  $\Delta u$  e  $\Delta w$  sono definiti in (4),  $\sigma$  e  $\tau$ , indicano i moltiplicatori di Lagrange, che rappresentano le tensioni interlaminari radiale e tangenziale che si scambiano mutuamente le due travi all'interfaccia, positive se agenti come gli assi e nella superficie inferiore della trave superiore, Fig 2.a. Inoltre, considerando per semplicità solo carichi di estremità, la variazione del lavoro dei carichi esterni è

$$\delta W = \sum_{i=1}^2 \delta W_i = \sum_{i=1}^2 [\bar{N}_i \delta u_i + \bar{T}_i \delta w_i + \bar{M}_i \delta \psi_i]_0^{\theta_T} \quad (9)$$

nella quale è stato posto il soprasegnato alle sollecitazioni esterne di bordo. La variazione di  $\Pi$  rispetto ai moltiplicatori di Lagrange porta, nella regione  $[0, \theta_T - \theta_D]$ , alle equazioni di vincolo interno,  $\Delta u = \Delta w = 0$ , e permette di esprimere gli spostamenti traslazionali dello strato 2, in funzione del resto degli spostamenti generalizzati, secondo la (4).

La sostituzione delle equazioni (7), (8) e (9), espresse in termini di spostamenti generalizzati, nell'eq. (6), ci porta a scrivere, dopo l'introduzione delle equazioni di vincolo (4), la seguente espressione:

$$\begin{aligned} \delta \Pi = & - \int_0^{\theta_T - \theta_D} \left\{ (N'_1 + N'_2 - T'_1 - T'_2) du_i + (T'_1 + T'_2 - N_1 - N_2) dw_i + \sum_{i=1}^2 \left[ M'_i - R_i T_i - (N'_i - T_i) \frac{t_i}{2} \right] d\psi_i \right\} d\theta + \\ & - \int_{\theta_T - \theta_D}^{\theta_T} \sum_{i=1}^2 [(N'_i - T_i) du_i + (T'_i + N_i) dw_i + (M'_i - T_i) d\psi_i] d\theta + \\ & - \left[ (N_1 + N_2) du_i \right]_{\theta_T - \theta_D} - \left[ (T_1 + T_2) dw_i \right]_{\theta_T - \theta_D} - \left[ \left( M_1 - N_2 \frac{t_1}{2} \right) d\psi_i \right]_{\theta_T - \theta_D} - \left[ \left( M_2 - N_2 \frac{t_2}{2} \right) d\psi_2 \right]_{\theta_T - \theta_D} + \\ & - \sum_{i=1}^2 [\bar{N}_i \delta u_i + \bar{T}_i \delta w_i + \bar{M}_i \delta \psi_i]_0^{\theta_T} = 0 \end{aligned} \quad (10)$$

dove le doppie parentesi  $\left[ [f] \right]_k = f^+ - f^-$  per  $k = \theta_T - \theta_D$  indicano, per ogni funzione  $f$ , le discontinuità attraverso la sezione che contiene il vertice della frattura, ( $\theta = \theta_T - \theta_D$ ), e con gli apici  $+$  e  $-$ , si indica che la funzione è valutata in  $\theta^+$  e  $\theta^-$ , rispettivamente. L'equazione (10) ed il lemma fondamentale del calcolo variazionale ci forniscono le equazioni indefinite di equilibrio per la porzione di struttura perfettamente unita  $(0, \theta_T - \theta_D)$ , per la regione delaminata  $(\theta_T - \theta_D, \theta_T)$  e le associate condizioni al contorno ( $\theta = 0, \theta = \theta_T$ ) e condizioni di continuità ( $\theta = \theta_T - \theta_D$ ).

Il problema differenziale con condizioni al contorno su più punti (BVP) dato dalle equazioni (10), deve essere risolto in termini di variabili spostamento nei due sub-intervalli del dominio; in particolare nella regione del dominio non delaminata, il problema deve essere risolto esclusivamente in termini delle quattro funzioni spostamento  $w_1(\theta)$ ,  $u_1(\theta)$ ,  $\psi_1(\theta)$ ,  $\psi_2(\theta)$ , in virtù delle equazioni di vincolo interno (4), mentre nelle regioni delaminate in termini di tutte e sei le variabili spostamento generalizzate.

Di particolare interesse sono le forze di interfaccia (tensioni interlaminari e forze), che si esercitano mutuamente i due strati nella zona non delaminata dell'interfaccia, che nascono come reazioni alle equazioni di vincolo interno (4). Le tensioni interlaminari (11) che agiscono sulla superficie inferiore della trave 2,  $\sigma$  e  $\tau$ , possono essere ottenute dall'equazione (6) introducendo le equazioni (4)

$$\begin{aligned}\sigma &= (T_1' + N_1)/R_D = -(T_2' + N_2)/R_D, & \theta \in (0, \theta_T - \theta_D), \\ \tau &= (N_1' - T_1)/R_D = (-N_2' + T_2)/R_D, & \theta \in (0, \theta_T - \theta_D).\end{aligned}\quad (11)$$

In generale le equazioni contenute tra doppie parentesi nella (10) sono compatibili con la presenza di forze concentrate di interfaccia nel tip della delaminazione. Con riferimento alla superficie inferiore dello strato 2, le forze concentrate di interfaccia nel tip possono essere ottenute in termini di discontinuità delle sollecitazioni

$$\begin{aligned}\Lambda_\tau &= N_2^- - N_2^+ = N_1^+ - N_1^-, \\ \Lambda_\sigma &= T_2^- - T_2^+ = T_1^+ - T_1^-, \end{aligned}\quad (12)$$

dove sforzi normali e tagli sono valutati nei lati positivi e negativi del tip di delaminazione. Le stesse conclusioni possono essere ottenute considerando l'equilibrio di un elemento infinitesimo a cavallo del tip di delaminazione Fig.2b, dove sono rappresentate anche le tensioni interlaminari.

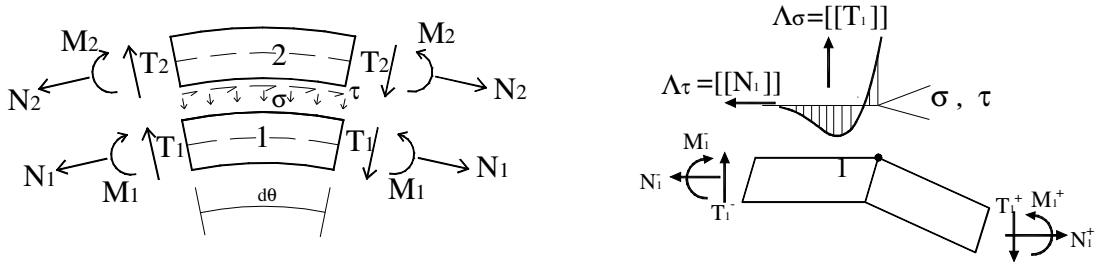


Fig. 2 – a) Concio infinitesimo di trave, b) Variabili di delaminazione usate nell'interfaccia forte.

### 3.1 Soluzione in forma chiusa per le componenti modali dell'ERR

L'energia di rilascio totale e le sue componenti modali vengono adesso calcolate usando la tecnica della chiusura virtuale (VCCT) applicando una procedura proposta in [5] nel contesto di un modello di delaminazione per piastra composita multistrato. Le espressioni analitiche, che sono utili per evidenziare i parametri meccanici coinvolti nel problema della frattura di un'interfaccia, saranno qui ottenute in modo conciso richiamando solo le principali equazioni dettagliate nel citato lavoro. In accordo con la VCCT l'energia di rilascio totale, nelle sue componenti modali, è la metà del lavoro fatto dalle forze concentrate di interfaccia, nel tip della delaminazione, per effetto del salto di spostamenti in seguito ad un avanzamento virtuale della delaminazione  $da=Rd\theta$ .

Per conseguenza, la componente di apertura, o da modo I, dell'energia di rilascio è valutata come

$$G_I = -\frac{1}{2da} \Lambda_\sigma d\Delta w^+ \quad (13)$$

dove, il moltiplicatore di Lagrange concentrato, è valutato opportunamente, per mezzo dell'eq. (12), e il corrispondente spostamento interlaminare, può essere espresso considerando il contributo delle deformazioni tangenziali delle rotazioni e degli spostamenti circonferenziali delle sezioni delle due travi

$$d\Delta w^+ = \left( \frac{T_2^-}{H_2} R_2 - \frac{T_1^-}{H_1} R_1 - R_2 \psi_2 + R_1 \psi_1 - u_2 + u_1 \right) d\theta. \quad (14)$$

Data l'ipotesi di perfetta adesione tra gli elementi di trave uniti, ne segue che  $w_1^- = w_2^-$ , ed inoltre, utilizzando le eq. (12), si arriva all'espressione dello spostamento interlaminare radiale

$$d\Delta w^+ = \llbracket \gamma_2 R_2 - \gamma_1 R_1 \rrbracket_a d\theta, \quad (15)$$

dove  $a$  rappresenta la coordinata del tip; infine, sostituendo il tutto nella (13) otteniamo:

$$G_I = \frac{1}{2R_D} (T_1^+ - T_1^-) (R_1 \gamma_1^+ - R_1 \gamma_1^- - R_2 \gamma_2^+ + R_2 \gamma_2^-). \quad (16)$$

Manipolando algebricamente quest'ultima espressione e tenendo conto della (3), si ottiene la relazione

$$G_I = \sum_{i=1}^2 \left( \frac{1}{2} \frac{R_i}{R_D} \llbracket T_i \gamma_i \rrbracket_a - \llbracket T_i \rrbracket_a (R_i \psi_i + u_i) \frac{1}{R_D} \right). \quad (17)$$

La componente di scorrimento, o da modo II, dell'energia di rilascio con un'analogia applicazione delle tecnica della chiusura virtuale sarà

$$G_{II} = \sum_{i=1}^2 \left( \frac{1}{2} \frac{R_i}{R_D} \llbracket N_i \varepsilon_i + M_i \kappa_i \rrbracket_a + \llbracket N_i \rrbracket_a \frac{w_i}{R_D} \right). \quad (18)$$

Dalle espressioni (17) e (18) viene fuori che la deformabilità tangenziale influenza direttamente solo la componente da modo II dell'energia di rilascio. Un vantaggio possibile dell'uso delle (17) e (18) consiste nel poter calcolare direttamente le componenti dell'energia di rilascio partendo direttamente dalle discontinuità nelle sollecitazioni. Infine, è banale ricordare che l'energia di rilascio totale si ottiene semplicemente dalla somma delle precedenti equazioni.

### 3.2 Soluzione in forma chiusa per l'ERR totale come bilancio energetico globale

In questo paragrafo il modello proposto sarà rianalizzato usando l'approccio energetico globale proposto in ([5]; [8]). Sebbene l'approccio energetico globale non determini la partizione modale, sarà qui ottenuta l'espressione globale dell'ERR sempre in termini di discontinuità delle sollecitazioni. Questo approccio, così come quello presentato nel punto precedente, partendo dal funzionale  $\Pi$  definito in (5), evita comunque di trattare direttamente con le singolarità tensionali. Il bilancio energetico, nel generico stadio del processo quasi statico di crescita della delaminazione

$$G\dot{\theta}R_D = -\frac{d}{dt} \Pi(u_i, w_i, \psi_i), \quad (19)$$

da

$$\frac{d}{dt} \Pi(u_i, w_i, \psi_i) = \left[ \sum_{i=1}^2 \int_0^{\theta_i} \dot{\Phi}_i(u_i, w_i, \psi_i) R_i d\theta + \int_0^{\theta_i - \theta_D} (\sigma \Delta w + \tau \Delta u) R_D d\theta - \dot{W} \right] + \dot{\theta} R_i \sum_{i=1}^2 \llbracket \Phi_i \rrbracket_{\theta_i - \theta_D}, \quad (20)$$

avendo indicato con il punto la derivata parziale rispetto al parametro monotono pseudo-temporale  $t$  (un carico o uno spostamento, per esempio) e con  $d/dt$  la derivata totale rispetto al tempo ed, inoltre la  $\llbracket f \rrbracket_{\theta_i - \theta_D}$  indica il salto  $f^+ - f^-$  che ha la funzione racchiusa. Si noti che l'energia potenziale modificata, nell'eq. (20), deve essere calcolata per variabili che soddisfano la condizione di stazionarietà (6). Nell'eq. (20) il contributo racchiuso tra parentesi quadre rappresenta la derivata del funzionale nella parte di dominio fisso, il secondo rappresenta il contributo che nasce dal moto dei due domini che sono separati nell'ascissa sede del vertice della delaminazione,  $\theta = \theta_i - \theta_D$ . Si noti che, nella (20), non

intervengono salti nelle tensioni interlaminari e nemmeno negli spostamenti, ma vengono messe in conto solo le discontinuità nell'energia di deformazione. La derivata dei termini sul dominio fisso fornisce quindi

$$\sum_{i=1}^2 \int_0^{\theta_T} [N_i \dot{\varepsilon}_i + M_i \dot{\kappa}_i + T_i \dot{\gamma}_i] R_i d\theta + \int_0^{\theta_T - \theta_D} (\sigma \Delta w + \tau \Delta u) R_D d\theta - \sum_{i=1}^2 (\bar{N}_i \dot{u}_i(\theta_T) + \bar{M}_i \dot{\psi}_i(\theta_T) + \bar{T}_i \dot{w}_i(\theta_T)), \quad (21)$$

Integrando per parti ed utilizzando le condizioni al contorno in  $\theta=0$ ,  $\theta=\theta_T$  porta a

$$-\sum_{i=1}^2 \int_0^{\theta_T} [N_i' \dot{u}_i + N_i \dot{w}_i + M_i' \dot{\psi}_i + T_i' \dot{w}_i - T_i (\dot{u}_i + R_i \dot{\psi}_i)] d\theta + \int_0^{\theta_T - \theta_D} (\sigma \Delta w + \tau \Delta u) R_D d\theta + \sum_{i=1}^{n_i + n_j} [[N_i \dot{u}_i + M_i \dot{\psi}_i + T_i \dot{w}_i]]_{\theta_T - \theta_D}, \quad (22)$$

Facendo uso delle eq. (3), (10), (11) e considerando il secondo termine a destra della (20) che contiene il salto dell'energia di deformazione nel tip, dalla (19) può adesso essere ricavata la seguente formula per l'energia di rilascio totale

$$G = \sum_{i=1}^2 \left( \frac{1}{2} \frac{R_i}{R_D} [[T_i \gamma_i + N_i \varepsilon_i + M_i \kappa_i]]_a - [[T_i]]_a (R_i \psi_i + u_i) \frac{1}{R_D} + [[N_i]]_a \frac{w_i}{R_D} \right). \quad (22)$$

Un passaggio fondamentale, che conduce alla (22), è l'osservazione che, a causa dei requisiti della compatibilità nel campo di spostamenti, le derivate totali dei parametri spostamento, rispetto al parametro pseudo-temporale, devono restare continue nell'apice della delaminazione

$$\left[ \left[ \frac{d}{dt} u_i \right] \right]_a = \left[ \left[ \frac{d}{dt} w_i \right] \right]_a = \left[ \left[ \frac{d}{dt} \psi_i \right] \right]_a = 0,$$

mentre, i salti nelle derivate parziali rispetto al tempo ( $\dot{u}_i$ , per esempio) e nel termine convettivo ( $\dot{\theta} u_i'$ , per esempio), non sono nulli. In oltre, per la regola di derivazione delle funzioni composte, per i salti delle derivate parziali e nei termini convettivi, possono essere prese le seguenti relazioni:

$$[[\dot{u}_i]]_a = -\dot{\theta} [[u_i']]_a, \quad [[\dot{w}_i]]_a = -\dot{\theta} [[w_i']]_a, \quad [[\dot{\psi}_i]]_a = -\dot{\theta} [[\psi_i']]_a.$$

#### 4. RISULTATI E DISCUSSIONE

Per valutare l'attendibilità delle relazioni analitiche trovate, dopo aver risolto analiticamente il problema differenziale con condizioni al contorno (10) e valutate le formule (17) e (18), sono stati effettuati dei confronti con [9], nel quale le analisi sono state svolte sia con classici modelli agli Elementi Finiti sia con un approccio numerico basato su un modello di trave multistrato. Nelle Fig. 3a e 3b sono mostrati gli andamenti dell'energia di rilascio, all'aumentare del rapporto tra gli spessori  $t_2/t_1$ , per trave curva con delaminazione di bordo e due forze di taglio uguali e opposte ( $T_1 = -T_2$ ). Le analisi sono state svolte nei casi di materiale omogeneo e isotropo e cilindricamente ortotropo. Lo spessore dello strato inferiore è stato mantenuto fisso e pari a  $t_1 = 1$  mm, lo sviluppo dell'intradosso della trave inferiore, è stato assunto pari a 30 mm. La trave curva è stata modellata con elementi quadrangolari a 8 nodi, come uno stato piano di tensione, mentre, l'energia di rilascio, è stata calcolata in termini di forze e spostamenti nodali usando la tecnica della chiusura virtuale della frattura (VCCT). Il modello FEM è presentato in Fig.4.

Si può notare che l'energia di rilascio totale è ben stimata anche con il modello analitico proposto, mentre le componenti modali sono calcolate ragionevolmente solo se viene adottata una modellazione della trave molto accurata. In effetti, quando il rapporto di  $t_2$  rispetto a  $t_1$  tende a ridursi, i modelli (Analitico) e multistrato (2-2) possono portare a grosse differenze nella partizione modale in confronto ai risultati delle analisi FEM, (con una trave isotropa e con  $t_2/t_1 = 0.50$  il modello (Analitico) fornisce un errore relativo, sul calcolo della componente da modo I, dell'ordine del 19% rispetto all'analisi FEM). Al contrario quando viene usato il modello di trave multistrato (4-3) la componente I dell'energia di rilascio

viene calcolata con un errore sotto al 3%, sia nel caso di materiale isotropo che per materiale ortotropo. Le tendenze nelle valutazioni delle energie di rilascio, per i casi di materiali isotropo e ortotropo, sono simili ma, quando il materiale è ortotropo i valori sono globalmente tutti più alti rispetto al caso di materiale isotropo, ciò dovuto alla maggiore deformabilità del primo.

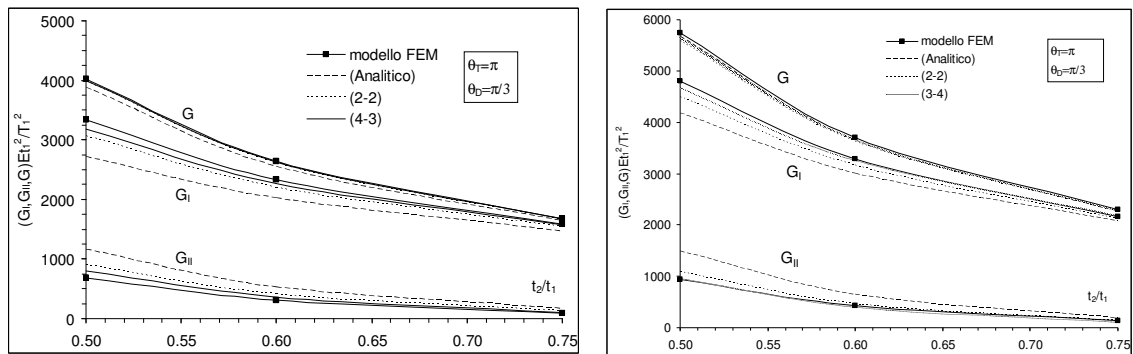


Fig. 3 – ERR adimensionalizzata, in funzione del rapporto tra gli spessori  $t_2/t_1$ : a) trave isotropa caricata da due forze opposte di taglio, b) trave cilindricamente ortotropo ( $E/G=100$ ). Confronto tra diversi modelli e i risultati ottenuti con analisi FEM.

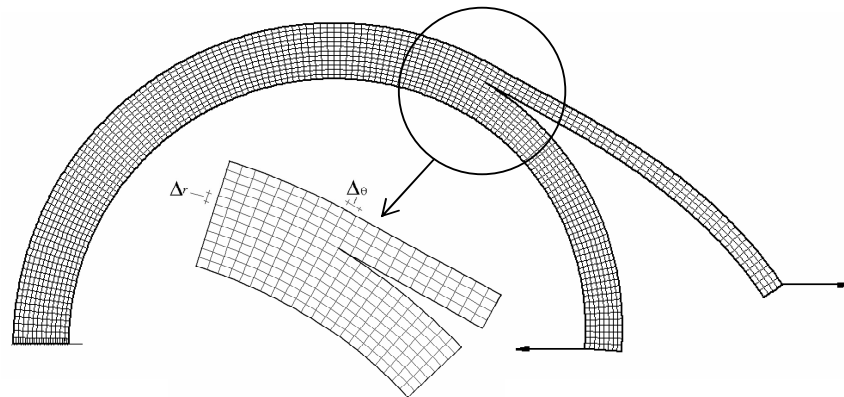


Fig. 4 – Modello agli elementi finiti.

## BIBLIOGRAFIA

- [1] Kedward KT, Wilson RS, McLean SK. Flexure of simply curved composites shapes. Composites 1989; 20:365-398.
- [2] Zou Z, Reid SR, Li S, Soden PD. Application of a delamination model to laminated composite structures. Composite Structures 2002; 56: 375-389.
- [3] Hutchinson, J.W. and Suo, Z., 1992. Mixed mode cracking in layered materials. In Advances in Applied Mechanics, Vol. 28, Academic Press, New York.
- [4] Raju, I.S. 1987 Calculation Of Strain-Energy Release Rates With Higher Order And Singular Finite Elements, Eng. Fracture Mech., 28, 251-274.
- [5] Bruno D, Greco F, Lonetti P. A coupled Interface-multilayer approach for mixed mode delamination and contact analysis In laminated composites. International Journal Solids Structures 2003; 40: 7245-7268.
- [6] Lu TJ, Xia ZC, Hutchinson JW. Delamination of beams under transverse shear and bending. Materials Science and Engineering 1994; A188:103-12.
- [7] Figiel L, Kamiński M. Mechanical and thermal fatigue delamination of curved layered composites. Computers & Structures 2003; 81:1865-1873.
- [8] Greco, F., Lonetti, P., Zinno, R., 2002. An analytical delamination model for laminated plates including bridging effects. Int. J. Solids Structures 39, 2435-2463.
- [9] Bruno D, Carpino R, Greco F, Lonetti F, 2006. Energy Release Rate and Mode Partition for Interlaminar Crack in Circular Laminated Beams. International Journal of Solid and Structures, 43 1201-1223.