

ANALISI DELLA DEGRADAZIONE A FATICA DELLA RIGIDEZZA ASSIALE DI LAMINATI UNIDIREZIONALI IN VETRO – POLIESTERE.

G. Allegri, M. Marchetti

*Dipartimento di Ingegneria Aerospaziale ed Astronautica, Università di Roma "La Sapienza",
Via Eudossiana 18, 00184 Roma
e-mail: marchetti@aerorisc.ing.uniroma1.it*

Sommario.

La degradazione della rigidezza di materiali soggetti a carichi ciclici rappresenta il primo stadio dell'evoluzione del fenomeno della fatica: tale fase è caratterizzata dalla assenza di difetti macroscopici nel materiale. La nucleazione di micro-cricche comporta tuttavia una sensibile alterazione dei moduli elastici del materiale stesso, che può avere importanti conseguenze a livello strutturale, in particolar modo per quanto concerne l'alterazione delle frequenze modali di vibrazione e dei carichi di buckling dei componenti: poiché la nucleazione dei difetti è dominata dalla presenza di porosità disperse in modo aleatorio nel materiale, la degradazione di rigidezza ha una connotazione tipicamente randomica. La modellazione di tale effetto della fatica deve pertanto essere condotta mediante il ricorso ad approcci di tipo probabilistico, anche se le sollecitazioni applicate hanno natura deterministica.

Nel presente lavoro viene presentato un modello basato sull'impiego dell'espansione di Karhunen-Loève per caratterizzare il danneggiamento assiale di laminati unidirezionali fibro-rinforzati: tale modello è stato validato mediante l'esecuzione di test di fatica su provini in vetro – poliestere. È stato osservato che la previsione delle statistiche della degradazione di rigidezza, per la particolare tipologia di materiale in esame, richiede di considerare almeno i primi due termini dell'espansione di Karhunen-Loève rappresentativa della variabile cumulativa di danneggiamento. Le curve caratteristiche della probabilità di danneggiamento, espressa in funzione del numero di cicli di carico applicati al materiale, sono state computate numericamente e confrontate con quelle dedotte dai test sperimentali: si è riscontrato un buon accordo fra le previsioni numeriche del modello proposto ed i risultati delle prove di fatica.

1. Introduzione.

La degradazione del modulo di rigidezza assiale nei materiali compositi può essere descritta seguendo l'approccio proposto da Kachonov [6], ovvero introducendo la variabile scalare di danneggiamento D

$$D = 1 - \frac{E}{E_0} \quad (1)$$

dove E rappresenta il modulo di Young del materiale difettato ed E_0 il modulo assiale del materiale vergine.

L'ipotesi che il processo di danneggiamento a fatica del materiale composito in esame sia descrivibile ricorrendo ad una sola variabile scalare è senza dubbio molto restrittiva: infatti un carico assiale ciclico, quale quello impiegato nelle prove sperimentali descritte in precedenza, causa la formazione nella matrice del materiale di due insiemi di microcricche, ciascuno ortogonale all'asse del carico applicato. Assumendo che il composito sia trasversalmente isotropo rispetto alla direzione di orientazione delle fibre, ne consegue che le quattro costanti caratterizzanti le proprietà elastiche siano soggette a variazioni significative con il manifestarsi della fatica: diversi autori [6], quali Lemaitre e Chaboche, Halm e Dragon e Kracinovic hanno pertanto optato per una modellazione del danneggiamento dei materiali, in particolar modo compositi, basata sull'impiego di variabili tensoriali di secondo o quarto ordine. Tali approcci sono indubbiamente più consistenti con la realtà fisica, almeno rispetto alla rappresentazione semplificata del danneggiamento

sintetizzata dalla (1). Nell'ambito del presente lavoro si prenderà in considerazione il processo di danneggiamento a fatica di laminati unidirezionali in vetro – poliestere: per tale tipologia di materiale, la sola variazione a fatica del modulo di Young, descritta mediante la (1), può essere comunque ritenuta ben rappresentativa del più generale processo di degradazione delle proprietà meccaniche globali del laminato. È inoltre opportuno sottolineare come la finalità di questo lavoro consista essenzialmente nell'analisi della aleatorietà intrinseca al danneggiamento da fatica, le cui peculiarità sono ben evidenziabili anche prendendo in esame la variazione di una singola componente del tensore di elasticità associato al materiale.

2. Ipotesi statistiche sulla variabile di danneggiamento $D(\gamma, t)$.

Si supponga che la variabile scalare D definita dalla (1) sia rappresentabile mediante un opportuno processo stocastico $D(\gamma, t)$, dove γ è un generico elemento dell'universo degli eventi Γ e t è la variabile temporale, che nel caso in esame potrà essere assimilata al numero di cicli di carico applicati ai campioni di materiale. Si assuma che la $D(\gamma, t)$ abbia natura gaussiana, ovvero che la sua distribuzione sia esprimibile in ogni istante di tempo nella forma

$$f_D(\delta, t) = \frac{1}{2\pi\sigma_D(t)} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\delta - \underline{D}}{\sigma_D}\right)^2} \quad (2)$$

dove $\underline{D}(t)$ rappresenta il valore medio della $D(\gamma, t)$ e $\sigma_D(t)$ la relativa deviazione standard.

La probabilità che al tempo t il valore del danneggiamento ecceda una soglia stabilita D' è quindi restituita dalla relazione:

$$P[D(\gamma, t) \geq D'] = 1 - \int_0^{D'} f_D(\delta, t) d\delta \quad (3)$$

Uno dei principali vantaggi riscontrabili introducendo l'ipotesi di normalità per la $D(\gamma, t)$ consiste nella possibilità di esprimerne la distribuzione caratteristica mediante due soli parametri, ovvero la media e la deviazione standard: in realtà tale particolarità sussiste anche per altre distribuzioni di frequente impiego nell'analisi statistica dei dati. In particolare modo, nello studio del processo di propagazione di cricche macroscopiche in materiali metallici, si è fatto spesso impiego della distribuzione lognormale, che pertiene ad una variabile il cui logaritmo sia gaussiano. Tuttavia, prendendo in considerazione il parametro di danneggiamento (1) impiegato nel presente lavoro, l'ipotesi di lognormalità del processo stocastico creerebbe delle difficoltà di natura numerica, poiché il logaritmo della variabile D tenderebbe a divergere negativamente in presenza di effetti di degradazione della rigidità contenuti. D'altra parte l'impiego di una distribuzione gaussiana per la $D(\gamma, t)$ comporta che esista comunque una probabilità finita che tale parametro possa assumere dei valori negativi, condizione che è fisicamente priva di consistenza: nel seguito si dimostrerà la probabilità associata con la condizione $D(\gamma, t) < 0$ risulta essere abbastanza limitata, e comunque decrescente nel tempo, come è lecito attendersi poiché il danno prodotto dalla fatica nel campione di materiale tende ad accumularsi all'aumentare del numero di cicli cui il provino è stato sottoposto.

3. Test sperimentali di fatica.

Un totale di 30 provini, realizzati in fibra di vetro E e resina poliestere, indurita con policarbonato di calcio, sono stati soggetti a test di fatica: i laminati erano unidirezionali, con 24 strati ad orientazione 0° . Tali campioni di materiale sono stati realizzati mediante la tecnologia della pultrusione: le dimensioni caratteristiche dei provini erano 25 cm di lunghezza, 5 cm di larghezza e 0.3 cm di spessore. Le proprietà elastiche e la resistenza dei provini vergini sono state misurate seguendo la normativa standard ASTM D3039-76, rilevando le deformazioni mediante estensimetri HBM XY 3/20. I provini erano provvisti di tabs alle estremità, per garantire una uniforme distribuzione degli sforzi nella sezione di mezzeria.

$\rho(\text{g/cm}^3)$	$E_1(\text{Gpa})$	$E_2(\text{Gpa})$	ν_{12}	ν_{21}	$G_{12}(\text{Gpa})$	$\sigma_{\max}(\text{MPa})$
2.7	25.91	6.1	0.27	0.062	2.51	360

Proprietà meccaniche dei campioni vergini.

Tabella 1

I test di fatica sono stati eseguiti mediante una macchina idraulica ITALSIGMA: il carico applicato ha avuto il profilo di un'onda sinusoidale, con frequenza pari a 3 Hz, valore medio di 2×10^5 N e stress – ratio R pari a 0.3. Tali prove sono state eseguite seguendo lo standard ASTM D3479-76: il modulo elastico longitudinale dei provini è stato misurato mediante un test statico ad intervalli di 2×10^3 cicli di carico.

L'andamento del valore medio \underline{D} della $D(\gamma,t)$ risulta essere, in condizioni di sollecitazione costanti, una funzione con buona approssimazione lineare del logaritmo del numero di cicli di carico cui il campione di materiale è stato sottoposto, come evidente dalla fig.1: operando una semplice regressione lineare si è quindi ottenuta la seguente espressione di \underline{D}

$$\underline{D} = 0.1068 \log(N) - 0.9452 \quad (4)$$

dove N rappresenta ovviamente il numero di cicli di sollecitazione. Dall'equazione precedente è immediato derivare che il rateo di danneggiamento medio del materiale è inversamente proporzionale al numero di cicli di sollecitazione a fatica cui è andato soggetto, ovvero

$$\frac{d\underline{D}}{dN} = \frac{\alpha}{N} \quad (5)$$

dove α è il primo coefficiente di regressione che compare nella (4).

Tale andamento caratteristico è interpretabile alla luce del fatto che il danno per fatica si produce inizialmente nella matrice e si manifesta ad un numero di cicli che corrisponde al 5% circa della durata totale dei campioni testati: successivamente alla micro - fratturazione della matrice segue la rottura dell'interfaccia fibra-matrice, con conseguente delaminazione del materiale e rottura localizzate delle fibre rinforzo. Durante tale fase, tuttavia, l'accumulo del danno avviene più lentamente, poiché le fibre fanno da ponte, "bridging", fra i lembi separati della matrice fratturata e sono contemporaneamente soggette al "pull-out" dalla matrice stessa. La rottura del materiale avviene di schianto quando la porzione di rinforzo lavorante si riduce ad una frazione tanto ridotta da non poter più resistere al carico applicato, condizione che corrisponde al rapido incremento finale del danno accumulato.

4. Rappresentazione della variabile di danneggiamento mediante l'espansione di Karhunen-Loève.

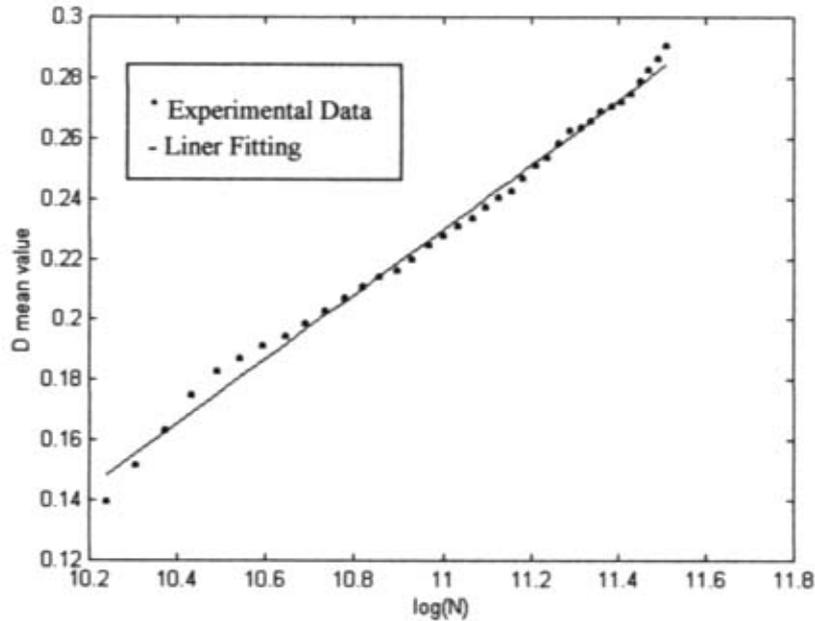
La stima della deviazione standard della $D(\gamma,t)$ può essere efficacemente condotta introducendo lo sviluppo di Karhunen-Loève: si supponga di considerare la matrice di covarianza del processo stocastico $D(\gamma,t)$, che è esprimibile nella forma

$$C_{ij} = \frac{1}{P} \sum_{k=1}^P (D_i^{(k)} - \underline{D}_i) (D_j^{(k)} - \underline{D}_j) \quad (6)$$

dove $D_i^{(k)}$ indica la k-esima realizzazione del processo $D(\gamma,t)$ all'i-esimo istante temporale; P è il numero complessivo di realizzazioni prese in esame. La natura della matrice di covarianza, sintetizzata dalla (6), è tale che essa risulta reale, simmetrica e definita positiva: pertanto i suoi autovalori risultano reali e positivi ed i suoi autovettori sono ortogonali.

Si introduca allora il processo stocastico ausiliario discretizzato $X_i(\gamma)$, legato alla $D(\gamma,t)$ dalla relazione

$$X_i = \Phi_{ji} (D_j - \underline{D}_j) \quad (7)$$



Valore medio della variabile di danneggiamento $D(\gamma,t)$ in funzione del tempo.

Fig. 1

dove Φ è la matrice che porta sulle colonne gli autovettori della C . È evidente che il processo $X_i(\gamma)$ risulta essere a media nulla; inoltre la matrice di covarianza ad esso associata può essere espressa nella forma

$$\begin{aligned} Cov[X_i(\gamma)] &= \frac{1}{P} \sum_{k=1}^P X_i^{(k)} X_j^{(k)} = \frac{1}{P} \sum_{k=1}^P \Phi_{ji} (D_j^{(k)} - \underline{D}_j) \Phi_{mi} (D_m^{(k)} - \underline{D}_m) = \\ &= \Phi_{ji} \left[\frac{1}{P} \sum_{k=1}^P (D_j^{(k)} - \underline{D}_j) (D_m^{(k)} - \underline{D}_m) \right] \Phi_{mi} = \Phi_{ij}^T C_{jm} \Phi_{mi} \end{aligned} \quad (8)$$

Si osservi tuttavia che il problema agli autovalori per la matrice di covarianza C della $D(\gamma,t)$ si scrive nella forma

$$C_{jm} \Phi_{mi} = \Phi_{ji} \Lambda_{il} \quad (9)$$

dalla quale è immediato ottenere

$$\Lambda_{il} = \Phi_{ij}^T C_{jm} \Phi_{mi} \quad (10)$$

Il confronto fra la (8) e la (10) permette quindi di evidenziare che la matrice di covarianza del processo $X_i(\gamma)$ è diagonale: se M è l'estremo degli indici temporali associati alla $X_i(\gamma)$ ed, ovviamente, alla $D_i(\gamma)$, ne consegue che $X_i(\gamma)$ è costituito da M variabili random indipendenti a media nulla. Invertendo la relazione (7) si ottiene pertanto

$$D_j = \underline{D}_j + \Phi_{ij} X_i \quad (11)$$

Introducendo il set di variabili random $\chi_i(\gamma)$ a media nulla e varianza unitaria, legate alle $X_i(\gamma)$ dalla semplice trasformazione

$$\chi_i = \frac{X_i}{\sqrt{\lambda_i}} \quad (12)$$

lo sviluppo (11) assume la forma dovuta a Karhunen e Loève

$$D_j = \underline{D}_j + \sum_{i=1}^M \Phi_{ij} \sqrt{\lambda_i} \chi_i \quad (13)$$

L'espansione (13) è in generale estesa ad un numero di termini pari al numero di istanti M in cui è stato discretizzato il processo $D(\gamma, t)$, che corrisponde alla dimensione della matrice di covarianza del processo. Il peso relativo dei termini che compaiono nello sviluppo è determinato essenzialmente dal modulo dell'autovalore ad essi associato. Si supponga di troncatura l'espansione (13) ai primi Q termini con $Q < M$, assumendo che l'indice "i" scandisca autovalori ordinati in modo crescente: pertanto dalla (13) si ottiene

$$D_j^a \cong \underline{D}_j + \sum_{i=1}^Q \Phi_{ij} \sqrt{\lambda_i} \chi_i \quad (14)$$

dove D_j^a indica il valore approssimato della variabile di danneggiamento.

L'errore quadratico medio commesso troncando lo sviluppo (13) può essere espresso nel modo seguente:

$$\varepsilon^2(Q) = \frac{1}{P} \sum_{p=1}^P \left[\sum_{j=1}^M \left(D^{(p)}_j - D^{(p)a}_j \right)^2 \right] \quad (15)$$

dove l'apice "p" indica la p-esima realizzazione dei processi stocastici D_j e D_j^a .

Sostituendo le equazioni (13) e (14) nella (15) si ottiene la seguente espressione dell'errore quadratico medio:

$$\varepsilon^2(Q) = \frac{1}{P} \sum_{p=1}^P \sum_{j=1}^M \sum_{k=Q+1}^M \sum_{l=Q+1}^M \sqrt{\lambda_k} \sqrt{\lambda_l} \Phi_{jk} \Phi_{jl} \chi^{(p)}_k \chi^{(p)}_l = \sum_{j=1}^M \sum_{k=Q+1}^M \sum_{l=Q+1}^M \sqrt{\lambda_k} \sqrt{\lambda_l} \Phi_{jk} \Phi_{jl} \delta_{kl} = \sum_{k=Q+1}^M \lambda_k \quad (16)$$

avendo sfruttato le seguenti relazioni

$$\frac{1}{P} \sum_{p=1}^P \chi_k^{(p)} \chi_l^{(p)} = \delta_{kl} \quad \sum_{j=1}^M \Phi^2_{jk} = 1, \forall k$$

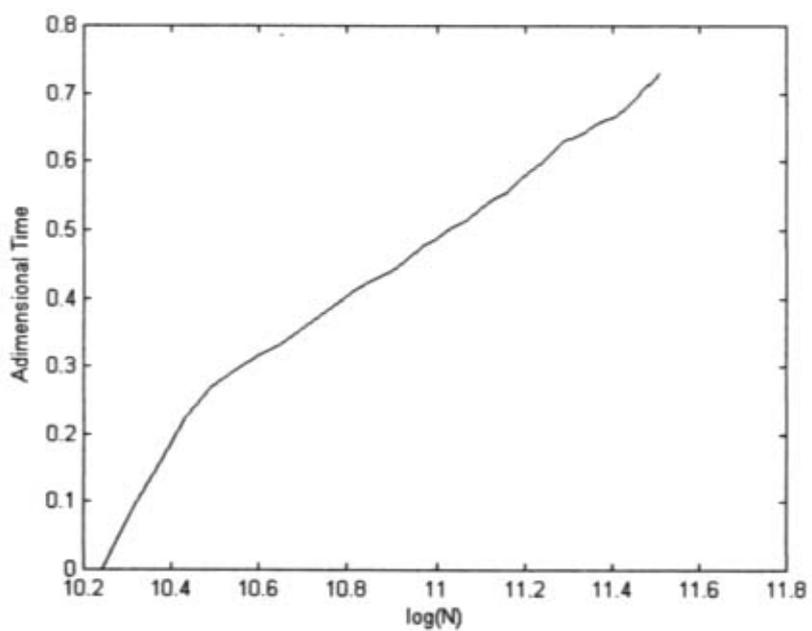
ovvero l'indipendenza delle χ_i e la normalità degli autovettori della matrice di covarianza C.

Dalla (16) è quindi evidente che l'errore che si commette troncando lo sviluppo a Q termini è pari alla somma degli autovalori da Q+1 ad M. Le registrazioni della variabile di danneggiamento $D(\gamma, t)$ nel caso delle prove di fatica effettuate nell'ambito della stesura del presente lavoro hanno evidenziato che i primi due autovalori della matrice di covarianza del processo sono largamente dominanti sui rimanenti: infatti si è ottenuto $\lambda_1 = 1.556 \times 10^{-1}$, $\lambda_2 = 1.556 \times 10^{-2}$, mentre la somma dei rimanenti autovalori è pari a 4×10^{-3} . Ciò comporta che, nel caso dei test di fatica qui esaminati, l'errore quadratico medio commesso considerando i primi due termini dello sviluppo di Karhunen-Loève (13) sia pari al 2.3%. La deviazione standard della $D(\gamma, t)$ è esprimibile a partire dalla espansione (13) nella forma

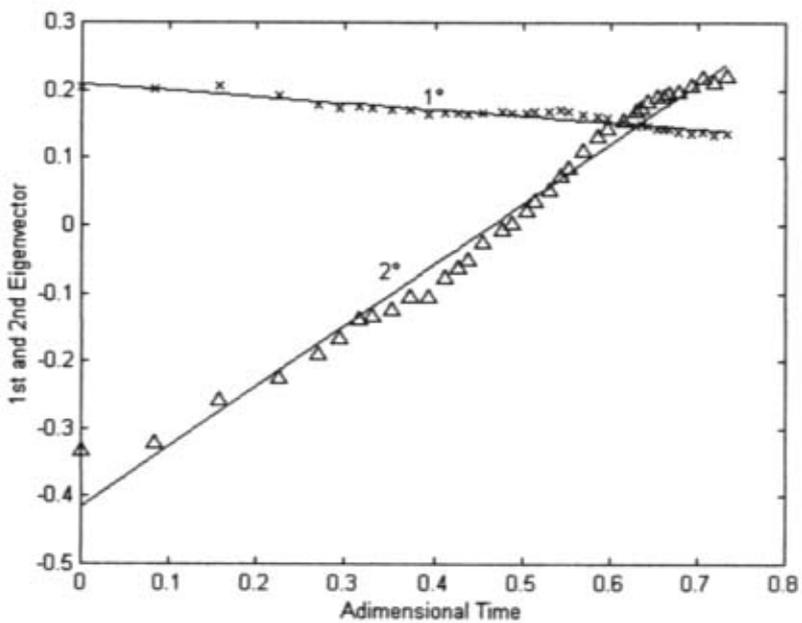
$$\sigma^J_D = \sqrt{\sum_{i=1}^M \Phi^2_{ji} \lambda_i} \quad (17)$$

Considerando lo sviluppo (14) troncato ai soli primi due autovalori, la (17) assume la forma seguente

$$\sigma^J_D = \sqrt{\Phi^2_{j1} \lambda_1 + \Phi^2_{j2} \lambda_2} \quad (18)$$



Tempo adimensionale in funzione dei cicli di carico.
Fig.3



Autovettori della matrice di covarianza in funzione del tempo adimensionale
Fig.4

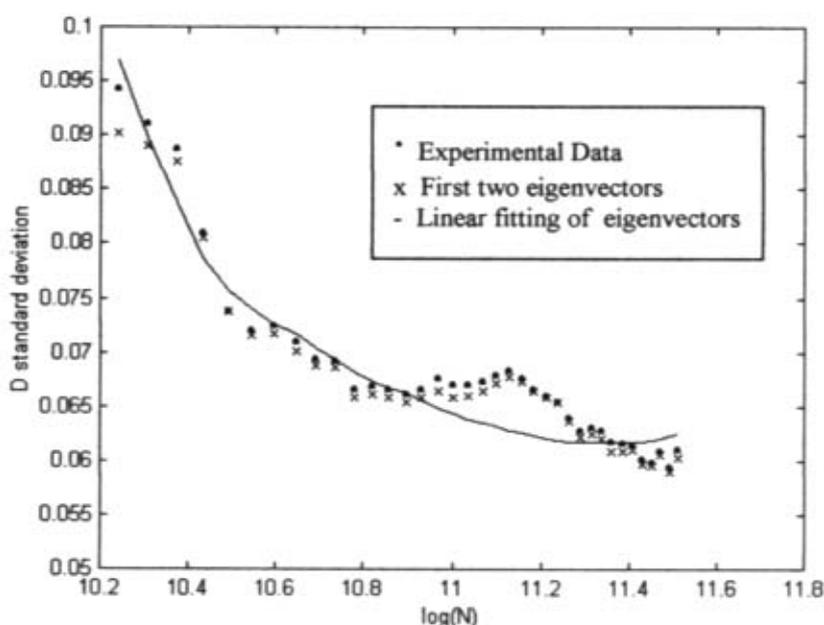
L'accuratezza dello sviluppo troncato di Karhunen-Loève è confermata anche dal confronto fra i valori sperimentali della deviazione standard della $D(\gamma,t)$ e quelli ottenuti numericamente considerando $Q=2$ nella (14): tali andamenti sono riportati in fig.2. Introducendo il tempo adimensionale τ , definito dalla relazione seguente:

$$\tau = \log \left[\frac{D(t)}{D(0)} \right] \quad (19)$$

si può osservare, come evidente dalla fig.3, che i primi due autovettori della matrice di covarianza C presentano un andamento lineare con buona approssimazione rispetto alla τ stessa. Ciò comporta che le espressioni linearizzate degli autovettori possano essere sostituite nella equazione (18), in modo da ottenere una stima attendibile della deviazione standard in funzione del numero di cicli di sollecitazione cui il provino è stato soggetto. In fig. 3 è riportato l'andamento del tempo adimensionale in funzione del logaritmo del numero di cicli di carico, mentre in fig. 4 è riportato l'andamento dei primi due autovettori in funzione della τ : la linea continua in fig. 2 rappresenta la deviazione standard stimata introducendo nella relazione (18) l'espressione linearizzata degli autovettori di C . Tale stima risulta essere in accordo entro il 6% con quella dedotta direttamente dai dati sperimentali.

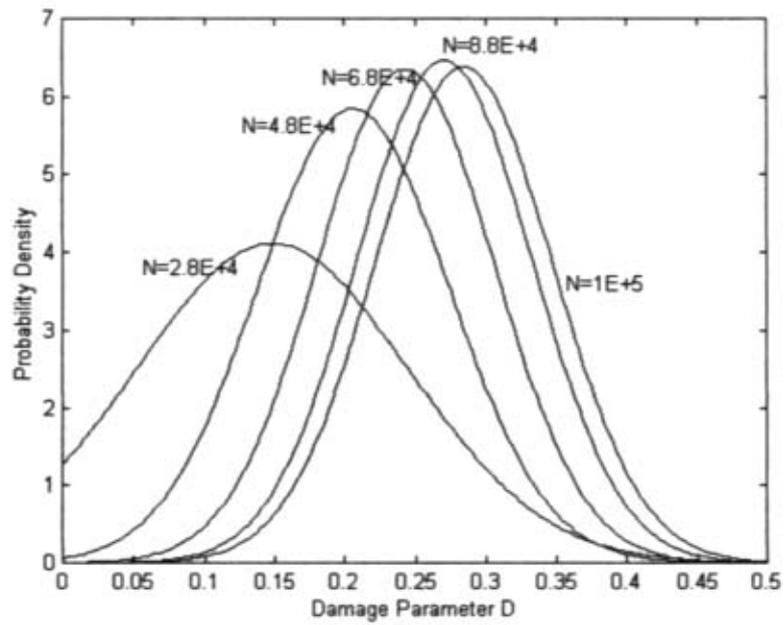
Noti quindi gli andamenti in funzione del numero di cicli del valore medio della $D(\gamma,t)$ e della relativa deviazione standard, le relazioni (2) e (3) restituiscono rispettivamente la funzione di distribuzione del danneggiamento in funzione del tempo e la probabilità di superamento di una assegnata soglia D' di decadimento del modulo di rigidità assiale.

La densità di probabilità associata alla $D(\gamma,t)$ è riportata in fig. 5: si può osservare come, per un basso numero di cicli di carico, esista, in base alla simulazione numerica, una probabilità apprezzabile di avere $D < 0$, condizione fisicamente non plausibile, come sottolineato in precedenza. Tuttavia l'entità di tale effetto è limitata ad un probabilità del 5% circa per l'istante iniziale posto a 28.000 cicli, tendendo poi rapidamente a ridursi: infatti essa diviene inferiore allo 0.01% dopo i 40.000 cicli.

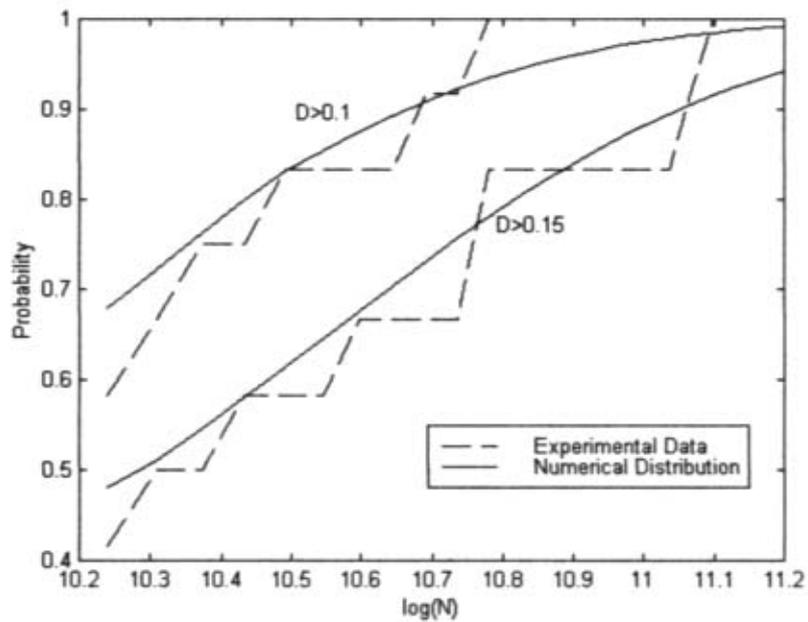


Deviazione standard della variabile di danneggiamento in funzione del numero di cicli di carico.

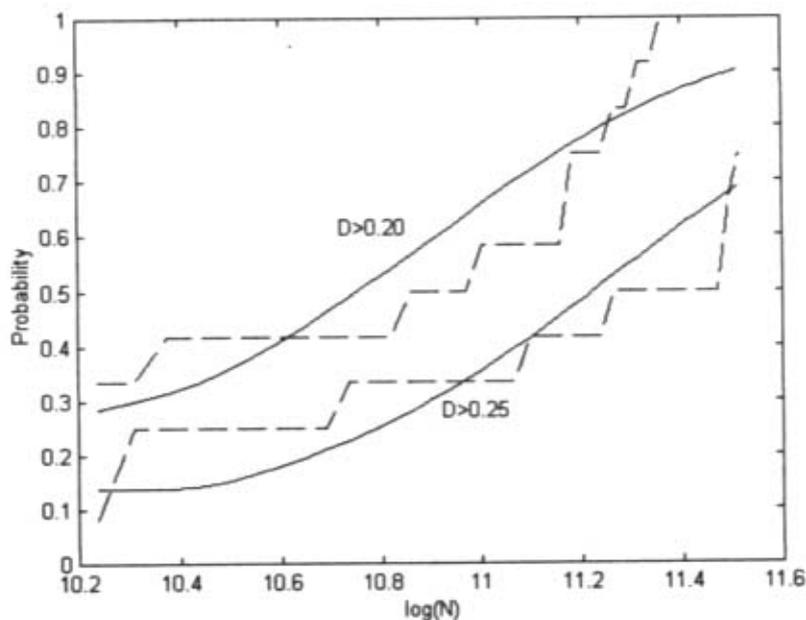
Fig.2



Densità di probabilità di $D(\gamma,t)$ in funzione del tempo.
Fig. 5



Distribuzione della variabile di danneggiamento: confronto fra risultati numerici e sperimentali.
Fig. 6



Distribuzione della variabile di danneggiamento: confronto fra risultati numerici e sperimentali.

Fig. 7

Nelle fig.6 ed 7 è riportato l'andamento della probabilità che il parametro di danneggiamento superi i quattro valori di riferimento 0.10, 0.15, 0.20 e 0.25 in funzione del logaritmo del numero di cicli: i valori sperimentali sono messi a confronto con quelli ottenuti numericamente dalla relazione (3). Si può notare come questi ultimi siano in buon accordo con quelli derivati dai test di fatica, fatta eccezione per alti valori della probabilità (>0.8). Tale discrepanza è attribuibile al fatto che la probabilità dedotta dai dati sperimentali è definita come rapporto del numero dei casi "favorevoli" ($D \geq D'$) rispetto a quelli possibili, ovvero al numero di realizzazioni sperimentali: essendo quest'ultimo relativamente ridotto, è evidente che la convergenza al valore unitario della probabilità sperimentale ha significato limitato.

5. Riassunto e conclusioni.

La degradazione della rigidità assiale, prodotta dalla fatica in campioni di materiale composito unidirezionale vetro - poliestere, è stata sperimentalmente rilevata eseguendo test di carico ciclico secondo lo standard ASTM D3479-76: la degradazione del modulo di Young del materiale è stata descritta mediante l'introduzione di una variabile di danneggiamento scalare. In accordo con risultati già ampiamente discussi in letteratura, si è inoltre rilevata una marcata dispersione dei valori del danneggiamento stesso in funzione del numero di cicli di sollecitazione applicati ai provini. Pertanto la degradazione di rigidità dei campioni è stata descritta mediante l'introduzione di un processo stocastico non stazionario con distribuzione gaussiana: il valore medio della variabile di danneggiamento è risultato essere con buona approssimazione una funzione lineare del logaritmo del numero di cicli di carico applicati ai campioni. La deviazione standard del processo di degradazione della rigidità è stato calcolato sviluppando la variabile di danneggiamento mediante l'espansione di Karhunen-Loève: si è inoltre dimostrato che è sufficiente troncare quest'ultima al secondo ordine per ottenere risultati sufficientemente approssimati. Di conseguenza si sono ottenute le curve di distribuzione della variabile di danneggiamento in funzione del numero di cicli di carico applicati ai campioni di materiale: queste ultime sono risultate in buon accordo con quelle dedotte dalla analisi statistica diretta dei dati sperimentali. Ulteriori sviluppi del modello proposto sono necessari per descrivere l'influenza dei parametri caratterizzanti i cicli di carico imposti, quali stress-ratio, valore medio e frequenza, sulle caratteristiche statistiche del processo stocastico rappresentativo dell'accumulazione del danno.

Bibliografia.

- [1] K.L. Reifsneider "Analysis of fatigue damage in composites laminates", *Int. J. of Fatigue*, 34, 3-11, **1980**.
- [2] K.L. Reifsneider "Stiffness reduction mechanism in composite materials", *Acta of ASTM Conference on Composite Laminates Damage*, **1980**.
- [3] J.L. Bogdanoff, F. Kozin "Probabilistic Models of cumulative damage", *J. Wiley, New York*, **1985**.
- [4] B.F. Spencer "Reliability Solution for the Stochastic Fatigue Crack Growth", *Eng. Fract. Mech.*, 34(1), 153-167, **1989**.
- [5] K. Sobczyk, B.F. Spencer "Random Fatigue: from Data to Theory", *Academic Press Inc., Boston*, **1992**.
- [6] Talreja R. "Damage Characterisation: Fatigue of Composite Materials", *Elsevier*, **1991**.
- [7] Xi Y. , Roh Y.S. "A general formulation of transition probabilities of Markov model and the application to fracture of composite materials", *Probabilistic Engineering Mechanics*, 15, 241-250, **2000**.
- [8] Reifsneider K.L. "Interpretation of laboratory tests information for residual strength of composite systems ", *ASTM STP 157, ASTM, Mitchell M.R., Philadelphia*, 205-223, **1992**.
- [9] M.E. Dekker "Failure criteria for unidirectional fiber composites", *J. Of Applied Mechanics*, Vol. 47, 329-352, **1994**.
- [10] Spanos P.D., Rowatt J.D. "Stochastic damage accumulation model for composite laminates", *J. of Eng. Mech. ASCE*, 121(11), 1240-1251, **1995**.
- [11] Shinozuka M. "Structural Response Variability", *J. Eng. Mech.*, 113(6), 825-42, *ASCE*, **1987**.
- [12] C .Huet "Application of variational concepts to size effects in elastic heterogeneous bodies", *J. Mech. Phys. Solids*, 38, 813-841, **1990**.
- [13] K. Sab. "On the homogenization and the simulation of random materials" *Europ. J. Mech. Solids*, 585-607, **1992**.
- [14] K. Sobczick, F. Spencer "Random Fatigue: From Data to Theory ", *Academic Press. Inc.*, **1992**.
- [15] Klieber M, Hien T.D. "The stochastic finite element method", *Chichester, Wiley*, **1992**.
- [16] M. Ostoja-Starzewski "Micromechanics as a basis of random elastic continuum approximations", *Prob. Eng. Mech.*, 8(2), S221-S230, **1993**.
- [17] Haneher P. "On the fundations of stochastic dislocation dynamics ", *App. Phys. A*, 62, 473-485, **1996**.
- [18] M. Ostoja-Starzewski "Random fields model in heterogeneous materials ", *Int. J. Solids Struct.*, 35, 2429-2455, **1998**.
- [19] D. Hoxha, F. Homand "Microstructural approach in damage modelling", *Mech. Mat.*, 32, 377-387, **2000**.
- [20] G. Allegri, S. Corradi, M. Marchetti "Probabilistic Modelling of Fatigue Crack Growth in a Titanium β Alloy", *Atti IGF 2000, DPPI, Università di Bari*, **2000**.
- [21] G. Allegri, G. Fais, M. Marchetti "Analysis of a Markov Chains based approach for modelling Fatigue of composite materials", *Proceedings SAMPE 2001 Europe Conference*, **2001**.