

INFLUENZA DELLE FIBRE NELLA RISPOSTA DI ELEMENTI IN CALCESTRUZZO ARMATO FIBRORINFORZATO

Alberto CARPINTERI, Giuseppe FERRO e Giulio VENTURA

*Politecnico di Torino, Dipartimento di Ingegneria Strutturale e Geotecnica
Corso Duca degli Abruzzi, 24 - 10129 Torino, Italy.*

SOMMARIO

Viene discussa l'influenza della presenza contemporanea di fibre e armature longitudinali in travi inflesse in calcestruzzo armato fibrorinforzato. La contemporanea presenza di due differenti armature, le principali longitudinali e le fibre che agiscono ricucendo la fessura a due differenti livelli, porta alla definizione di due numeri di fragilità, da cui dipende la risposta strutturale. Tali numeri adimensionali risultano dipendere dalla tenacità della matrice fragile, dal tipo e dalla quantità di rinforzo e dalla dimensione strutturale caratteristica. Nel lavoro vengono presentati alcuni accorgimenti che consentono di ridurre i tempi richiesti nelle simulazioni attraverso una più efficiente valutazione del contributo delle tensioni di richiusura dovute alla resistenza a trazione della matrice e alla presenza delle fibre. I risultati delle simulazioni mostrano l'influenza dei numeri di fragilità sulla risposta strutturale, e in particolare della quantità e tipologia delle fibre.

1. Introduzione

Negli ultimi anni si sta assistendo ad un crescente interesse per i materiali compositi a matrice cementizia, legato in particolar modo all'utilizzo di calcestruzzi ad alta ed altissima resistenza di nuova concezione. Questi calcestruzzi, se da un lato hanno proprietà di resistenza e durabilità molto promettenti, mostrano altresì un comportamento spiccatamente fragile. L'aggiunta di fibre produce, attraverso l'azione di *bridging* che agisce sulle micro- e macro-fessure della matrice cementizia, incrementi di tenacità alla frattura, di duttilità strutturale e di durabilità del manufatto. Risulta tuttora aperta la questione se, e con quale affidabilità, sia possibile sostituire o integrare le classiche barre di armatura in acciaio con opportune percentuali di fibre disperse nella matrice cementizia. Il modello del bridged crack, esteso alla contemporanea presenza di fibre e armature metalliche, si propone come uno strumento di calcolo rivolto allo studio ed alla simulazione del comportamento meccanico di questa classe di materiali. Contrariamente ai modelli di calcolo a rottura, il bridged crack consente non solo la valutazione del carico di collasso, ma anche della transizione fragile-duttile, di fenomeni di propagazione stabile o instabile della fessura nonché degli effetti di scala dovuti alle dimensioni geometriche dell'elemento stesso.

Il modello teorico cui si fa riferimento determina le incognite del problema considerando esclusivamente la sezione fessurata e utilizzando concetti quali la cedevolezza locale ed il fattore di intensificazione delle tensioni. Esso costituisce un'estensione dei modelli proposti da Carpinteri [1, 2] e da Bosco e Carpinteri [3] per una distribuzione discontinua di fibre e da Carpinteri e Massabò [4] per una distribuzione continua. Il modello simula l'azione di due differenti livelli di armatura sulla sezione fessurata di un elemento strutturale soggetto a flessione, ed è stato recentemente messo a punto da Carpinteri et al. [5] e Ferro [6]. Le

armature longitudinali (principali) vengono simulate mediante l'azione di forze applicate sulle facce della fessura. Le fibre (armatura secondaria) sono invece modellate mediante l'azione di tensioni distribuite sui lembi della fessura. Tali tensioni sono in generale funzioni della ampiezza della apertura della fessura, e si annullano per ampiezze maggiori di un valore critico w_c .

La risposta dell'elemento strutturale risulta dipendere da due parametri adimensionali N_P , detti numeri di fragilità, legati alle percentuali di armature e di fibre, e dalla ampiezza critica della apertura della fessura adimensionalizzata \tilde{w}_c funzione del legame costitutivo e quindi della tipologia delle fibre stesse. La dipendenza dei parametri adimensionali dalla radice quadrata della altezza della sezione trasversale della trave evidenzia la presenza di effetti di scala.

Nel lavoro si ripercorre schematicamente il modello teorico, evidenziando il problema della valutazione del contributo delle tensioni coesive e come esso possa essere valutato secondo tecniche numericamente efficienti. Infatti l'interazione tra le fibre e le armature metalliche e l'accurata valutazione delle quantità che compaiono nel modello si dimostra particolarmente impegnativa dal punto di vista computazionale. La riscrittura, sotto opportuna forma, degli integrali legati alla valutazione degli effetti coesivi consente una significativa ottimizzazione della collocazione dei punti di quadratura che si riflette direttamente nel contenimento dei tempi di calcolo.

Vengono infine illustrati gli effetti dei parametri adimensionali sulla risposta strutturale. I valori assunti dai parametri, e quindi la combinazione di percentuali di armature e fibre, insieme alla dimensione dell'elemento, determinano la risposta fragile o duttile dell'elemento strutturale. Tale informazione risulta essere un parametro di fondamentale importanza nella progettazione, e consente quindi un più accurato mix design del calcestruzzo.

2. Il modello Bridged Crack

Il modello teorico oggetto del presente lavoro interpreta e riproduce il comportamento flessionale monotono di un elemento in calcestruzzo armato fibro-rinforzato. Vengono presi in esame sia la matrice fragile con le armature principali sia le fibre annegate all'interno della matrice (armature secondarie). In fig. 1 è riportato lo schema di un elemento di trave in calcestruzzo armato fibro-rinforzato fessurato, ove h è l'altezza della sezione trasversale, b il suo spessore ed a la lunghezza della fessura. Con $\xi = a/h$ viene definita la lunghezza normalizzata della fessura e con $\zeta = x/h$ l'ascissa normalizzata, avendo indicato con x la generica ascissa rispetto all'intradosso della sezione trasversale.

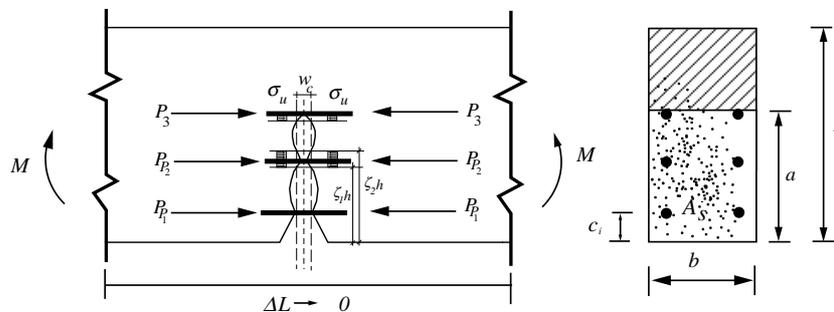


Figura 1. Schema di un elemento di trave fessurato.

La distribuzione di forze discrete P_i e continue $\sigma(w)$ applicate direttamente sulle facce della fessura rappresentano il meccanismo di *bridging* rispet-

tivamente delle armature longitudinali (armatura principale) e delle fibre (armature secondarie). Con c_i si indica la distanza della i esima armatura longitudinale rispetto all'intradosso della sezione trasversale ed il suo valore adimensionale è uguale a $\zeta_i = c_i/h$. La funzione $\sigma(w)$, rappresentativa dell'azione esercitata dalle fibre sulla fessura, definisce la relazione costitutiva tra le tensioni di bridging e l'apertura della fessura $w(x)$, e si assume che essa si annulli quando l'apertura della fessura supera un prefissato valore critico w_c . La legge $\sigma(w)$ può essere ricavata da modelli di normativa o per interpolazione di prove sperimentali.

Per la matrice cementizia si ipotizza una relazione costitutiva tensione-deformazione elastica lineare ed una condizione di propagazione della fessura in accordo alla Meccanica della Frattura Elastica Lineare. La fessura inizia a propagarsi quando il fattore globale di intensificazione delle tensioni K_I uguaglia la tenacità alla frattura della matrice K_{IC} . Per definire tali parametri sono state prese in esame le soluzioni per una striscia infinita intagliata lateralmente [7, 8].

La relazione di bridging che lega la forza di reazione P_i della i esima armatura con la relativa apertura w_i della fessura al livello dell'armatura è stata assunta rigido-plastica per descrivere sia il meccanismo di plasticizzazione delle armature sia lo scorrimento relativo tra armatura e matrice.

La massima trazione di bridging è definita per le armature principali mediante la forza ultima $P_{P_i} = A_i \sigma_y$ e dalle tensioni $\sigma_0 = \gamma \sigma_u$ per le fibre, avendo indicato con A_i l'area della singola armatura, con γ il rapporto volumetrico delle fibre, con σ_y e σ_u il minimo tra la tensione di snervamento ed il limite di scorrimento rispettivamente delle armature e delle fibre.

Si consideri una trave inflessa fessurata (fig. 1) e sia K_I il fattore di intensificazione delle tensioni in corrispondenza dell'apice della fessura. Mediante il principio di sovrapposizione degli effetti, K_I si può ottenere come somma dei fattori di intensificazione delle tensioni K_{IM} (dovuto al momento flettente M), K_{I_i} (dovuti alle azioni P_i degli m livelli di armature longitudinali) e $K_{I\sigma}$ (dovuti alle azioni di richiusura delle fibre)[5, 6]:

$$K_{IC} = K_{IM} - \sum_{i=1}^m K_{I_i} - K_{I\sigma}. \quad (1)$$

Nella (1) i fattori di intensificazione degli sforzi possono essere espressi nella forma:

$$K_{IM} = \frac{M_F}{bh^{1.5}} Y_M(\xi) \quad ; \quad K_{I_i} = \frac{P_i}{bh^{0.5}} Y_P(\xi, z_i) \quad ; \quad (2)$$

$$K_{I\sigma} = \sum_{i=1}^{n_c} \frac{1}{bh^{0.5}} \int_{\zeta_{1i}}^{\zeta_{2i}} \sigma_0(w(\zeta)) Y_P(\xi, \zeta) bh \, d\zeta, \quad (3)$$

in cui le funzioni Y_M and Y_P , tratte da [7, 8], sono riportate in [9]. In (3) n_c è il numero di zone coesive, in cui $\sigma_0(w) \neq 0$, definite sugli intervalli $[\zeta_{1i}, \zeta_{2i}] \quad i = 1 \dots n_c$.

Sia ρ la percentuale di armatura delle barre longitudinali. Introducendo la definizione dei numeri di fragilità $N_P^{(1)}$, $N_P^{(2)}$ e l'apertura critica adimensionale della fessura \tilde{w}_c :

$$N_P^{(1)} = \rho \frac{\sigma_y h^{0.5}}{K_{IC}} \quad ; \quad N_P^{(2)} = \gamma \frac{\sigma_u h^{0.5}}{K_{IC}} \quad ; \quad \tilde{w}_c = \frac{E w_c}{K_{IC} h^{0.5}}, \quad (4)$$

e ricavando K_{IM} dalla (1) con le sostituzioni (2)(3) si ottiene l'equazione di

equilibrio adimensionale:

$$\tilde{M}_F = \frac{1}{Y_M(\xi)} \left(1 + N_P^{(1)} \sum_{i=1}^m \tilde{\rho}_i \tilde{P}_i Y_P(\xi, z_i) + N_P^{(2)} \sum_{i=1}^{n_c} \int_{\zeta_{1_i}}^{\zeta_{2_i}} \tilde{\sigma}_0(\tilde{w}) Y_P(\xi, \zeta) d\zeta \right), \quad (5)$$

ove:

$$\tilde{M}_F = \frac{M_F}{K_{IC} b h^{1.5}} \quad ; \quad \tilde{P}_i = \frac{P_i}{P_{P_i}} \quad ; \quad \tilde{\rho}_i = \frac{\rho_i}{\rho} \quad ; \quad \tilde{\sigma}_0 = \frac{\sigma_0(w(\zeta))}{\gamma \sigma_u}. \quad (6)$$

L'equazione di equilibrio (5) fornisce il valore del momento flettente di propagazione della fessura in funzione della trazione alle barre di armatura e delle tensioni coesive. Queste quantità sono funzione, attraverso le rispettive equazioni costitutive, degli spostamenti ai lembi della fessura.

L'apertura della fessura ad una generica ascissa ζ può essere valutata sommando i contributi dovuti al momento flettente, alle trazioni nelle armature ed alle tensioni coesive. Valutando l'apertura per $M = M_F$ (incipiente propagazione) e considerando gli spostamenti adimensionalizzati secondo la (4.c), si ottiene:

$$\begin{aligned} \tilde{w} &= \tilde{w}_M - \tilde{w}_P - \tilde{w}_\sigma = 2\tilde{M}_F \int_{\zeta}^{\xi} Y_M(x) Y_P(x, \zeta) dx + \\ &- 2N_P^{(1)} \sum_{i=1}^m \tilde{\rho}_i \tilde{P}_i \int_{\max(\zeta, \zeta_i)}^{\xi} Y_P(x, z_i) Y_P(x, \zeta) dx + \\ &- 2N_P^{(2)} \sum_{i=1}^{n_c} \int_{\max(\zeta, \zeta_{1_i})}^{\xi} \left[\int_{\zeta_{1_i}}^{\min(x, \zeta_{2_i})} \tilde{\sigma}_0 Y_P(\min(x, \zeta_{2_i}), y) dy \right] Y_P(x, \zeta) dx \quad (7) \end{aligned}$$

Introducendo la legge costitutiva rigido-plastica delle armature, lo spostamento valutato alle ascisse $\zeta = \zeta_i \quad i = 1 \dots m$, è uguale a zero se $P_{P_i} - P_i < 0$, cioè se $1 - \tilde{P}_i < 0$. Detta H la funzione a gradino (Heaviside step function), la matrice diagonale $[H_P] = \text{diag} \left(H(1 - \tilde{P}_i) \right)$, $i = 1 \dots m$, consente di esprimere il vettore degli spostamenti adimensionali in corrispondenza degli m livelli di barre di armatura attraverso la seguente espressione vettoriale:

$$\{\tilde{w}\} = [H_P] \left(\{\tilde{\lambda}_M\} \tilde{M} - [\tilde{\lambda}] \{\tilde{P}\} - \{\tilde{w}_\sigma\} \right), \quad (8)$$

in cui:

$$\{\tilde{\lambda}_M\}_i = 2 \int_{z_i}^{\xi} Y_M(x) Y_P(x, z_i) dx \quad i = 1 \dots m; \quad (9)$$

$$[\tilde{\lambda}]_{ij} = 2N_P^{(1)} \tilde{\rho}_j \int_{\max(z_i, z_j)}^{\xi} Y_P(x, z_i) Y_P(x, z_j) dx, \quad i, j = 1 \dots m; \quad (10)$$

$$\{\tilde{w}_\sigma\}_i = \tilde{w}_\sigma(z_i), \quad i = 1 \dots m. \quad (11)$$

L'equazione (8), con \tilde{M} ricavato dalla (5), risulta essere in generale una equazione non-lineare nelle incognite \tilde{w} , n_c , $[\zeta_{1_i}, \zeta_{2_i}]$, $i = 1 \dots n_c$. La sua soluzione per una prefissata profondità della fessura ξ consente di determinare il campo di spostamenti, il momento adimensionale di incipiente propagazione \tilde{M}_F attraverso la (5) e la rotazione relativa della sezione, data in forma adimensionale dalla:

$$\begin{aligned}
\tilde{\phi} &= \phi \frac{Eh^{0.5}}{K_{IC}} = \tilde{\phi}_M - \sum_{i=1}^m \tilde{\phi}_I - \tilde{\phi}_\sigma = \\
&= 2\tilde{M}_F \int_0^\xi Y_M^2(\zeta) d\zeta - 2N_P^{(1)} \sum_{i=1}^m \tilde{\rho}_i \tilde{P}_i \int_{z_i}^\xi Y_P(\zeta, z_i) Y_M(\zeta) d\zeta + \\
&- 2N_P^{(2)} \sum_{i=1}^{n_c} \int_{\zeta_{1_i}}^\xi \left[\int_{\zeta_{1_i}}^{\min(x, \zeta_{2_i})} \tilde{\sigma}_0 Y_P(\min(x, \zeta_{2_i}), y) dy \right] Y_M(x) dx \quad (12)
\end{aligned}$$

3. Valutazione dei contributi delle tensioni coesive

Nel calcolo dello spostamento \tilde{w}_σ e della rotazione $\tilde{\phi}_\sigma$ dovuti alle tensioni di richiusura che nascono per la presenza delle fibre e per la resistenza a trazione della matrice cementizia, eqs. (??), compaiono due integrali doppi. Omettendo i termini costanti, i due integrali da valutare sono:

$$I_\phi = \int_{\zeta_1}^\xi \int_{\zeta_1}^{\max(\zeta_1, \min(x, \zeta_2) - \delta_3)} \tilde{\sigma}_0(y) Y_P(\min(x, \zeta_2), y) dy Y_M(x) dx; \quad (13)$$

$$I_w = \int_{\min(\xi, \max(\zeta, \zeta_1) + \delta_3)}^\xi \int_{\zeta_1}^{\max(\zeta_1, \min(x, \zeta_2) - \delta_3)} \tilde{\sigma}_0(y) Y_P(\min(x, \zeta_2), y) dy Y_P(x, \zeta) dx. \quad (14)$$

La quantità δ_3 è il *cutoff* definito da Carpinteri e Massabò al fine di eliminare la singolarità delle funzioni integrande [9]. Gli integrali (13) ed (14) possono essere calcolati attraverso librerie numeriche come *iterated integrals*, con cui si valutano integrali aventi in generale la forma:

$$\int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y) dy dx, \quad (15)$$

in cui $g_1(x)$ e $g_2(x)$ sono le funzioni che esprimono gli estremi di integrazione dell'integrale interno. La quadratura adattativa della (15) risulta computazionalmente costosa in quanto costruita attraverso due quadrature adattative per funzioni di una variabile. Quando questa tecnica viene applicata alla quadratura su domini standard si ha una distribuzione inefficiente dei punti di quadratura.

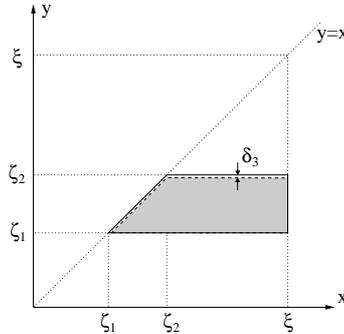


Figura 2. Dominio di integrazione per la valutazione della rotazione, eq. (13)

Esaminando gli estremi di integrazione delle formule (13) ed (14) è tuttavia possibile osservare che i domini di integrazione possono essere visti come combinazione di domini rettangolari e triangolari. Rappresentando le funzioni che descrivono gli estremi di integrazione sul piano cartesiano si ottiene il dominio riportato in fig. 2 per il calcolo della rotazione, ed i domini riportati in fig. 3 per il calcolo dello spostamento ad una generica ascissa ζ per una distribuzione di tensioni nell'intervallo $[\zeta_1, \zeta_2]$. Nelle figure la linea tratteggiata rappresenta il cutoff.

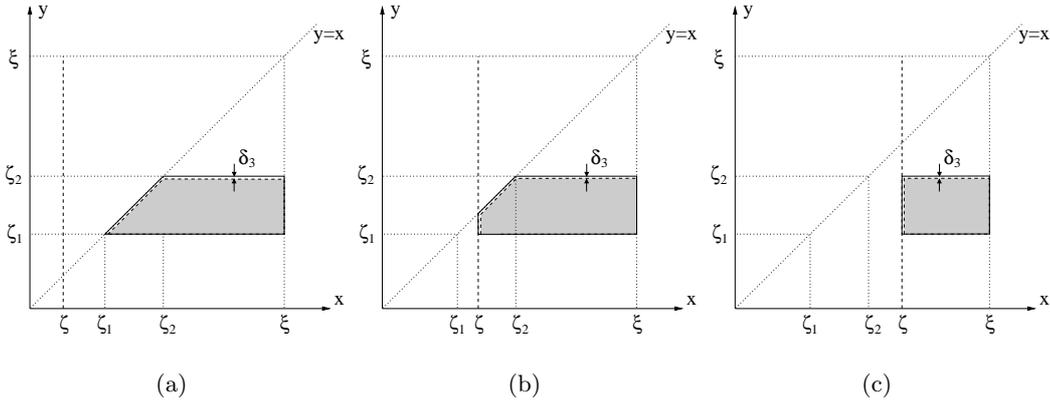


Figura 3. Dominio di integrazione per la valutazione dello spostamento ad una generica ascissa ζ , eq. (14), nei casi (a) $\zeta < \zeta_1$, (b) $\zeta_1 < \zeta < \zeta_2$, (c) $\zeta > \zeta_2$.

Il calcolo degli integrali può essere quindi eseguito molto più efficientemente utilizzando regole di quadratura per domini quadrati e rettangolari di ordine elevato [10] o librerie adattative [11] su regioni standard.

4. Influenza dei parametri sulla risposta strutturale

Il modello introdotto nei precedenti paragrafi è stato utilizzato per valutare il comportamento flessionale di travi in calcestruzzo armato fibrorinforzato. Dalla formulazione teorica si evince come la risposta strutturale dipenda dai numeri di fragilità $N_P^{(1)}$ ed $N_P^{(2)}$ e dall'ampiezza critica di apertura della fessura \tilde{w}_c , che insieme alla curva $\sigma(w)$ rappresenta l'equazione costitutiva della fibra.

Dalla (4) si osservi che $N_P^{(1)}$ è relativo alla armatura longitudinale tradizionale, $N_P^{(2)}$ è funzione della percentuale e della resistenza delle fibre e \tilde{w}_c della loro tipologia. Al fine di interpretare l'influenza di ciascun gruppo adimensionale sulla risposta strutturale vengono presentati alcuni diagrammi al variare di un gruppo, considerando costanti gli altri due.

Si considera un elemento strutturale nel quale, al fine di semplificare l'interpretazione delle curve, è presente un unico rinforzo longitudinale posto in corrispondenza della ascissa normalizzata $\zeta_1 = 0.1$.

Come primo caso, fig.4, è riportato il diagramma adimensionale momento-profondità della fessura tenendo fissi il numero di fragilità primario $N_P^{(1)}=1.0$ ed il valore dell'apertura critica della fessura adimensionalizzato $\tilde{w}_c=300$, al variare del numero di fragilità secondario $N_P^{(2)}$ tra 0 (assenza di fibre) e 1.9.

Per $0 < \xi < 0.1$, la fessura interessa esclusivamente la matrice cementizia. Il comportamento softening è controllato dalla tenacità della matrice cementizia e dal rinforzo secondario. Per profondità di fessure tendenti a zero, si ottiene una resistenza infinita, come previsto dalla Meccanica della Frattura Elastica

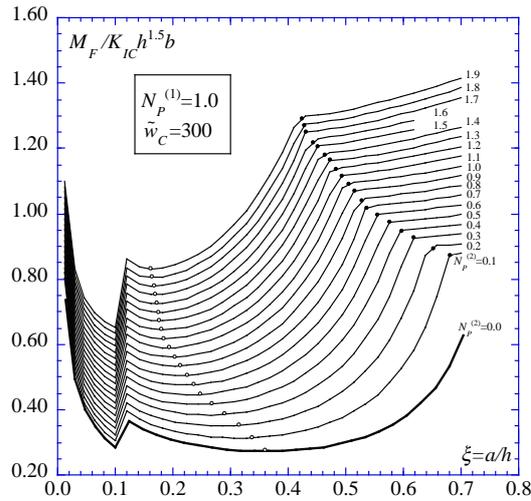


Figura 4. Momento di propagazione in funzione della profondità della fessura per un elemento strutturale caratterizzato da $N_P^{(1)}=1.0$, $\tilde{w}_c=300$, e con $N_P^{(2)}$ compreso tra 0.0 e 1.9.

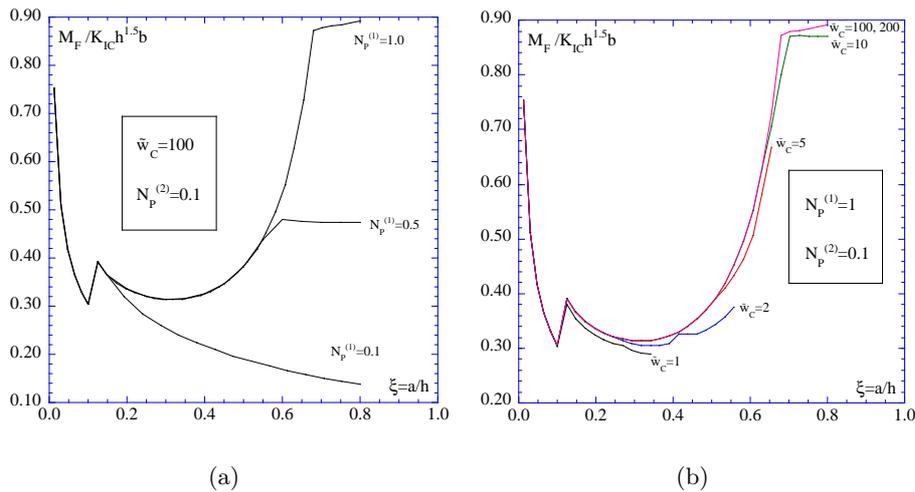


Figura 5. Momento di propagazione in funzione della profondità della fessura per un elemento strutturale caratterizzato da, (a) $N_P^{(2)}=0.1$, $\tilde{w}_c=100$, $N_P^{(1)}$ compreso tra 0.1 e 1.0 e, (b) $N_P^{(1)}=1.0$, $N_P^{(2)}=0.1$, \tilde{w}_c compreso tra 1 e 200.

Lineare. In corrispondenza di $\xi = 0.1$, quando la fessura raggiunge la barra di armatura, si evidenzia un salto nel diagramma. Fissati tutti i parametri meccanici e geometrici della sezione trasversale, si considera la variazione di $N_P^{(2)}$ da 0.0 a 1.9 per incremento del contenuto percentuale di fibre. In tal caso, come si evince dalla fig.4, l'incremento della percentuale aumenta la tenacità e, in secondo luogo, anche la resistenza. Infatti le curve sono traslate verso valori maggiori del momento di propagazione della fessura. I cerchi vuoti nel diagramma indicano il minimo per ciascuna curva. Tale punto rappresenta una transizione nel processo evolutivo della propagazione della fessura. Per profondità di fessura minori di quella corrispondente al minimo, la risposta è instabile e la propagazione della fessura può essere evitata solo diminuendo il carico applicato. Viceversa, per profondità di fessura maggiori del valore in corrispondenza del minimo della curva, il processo è stabile, ed

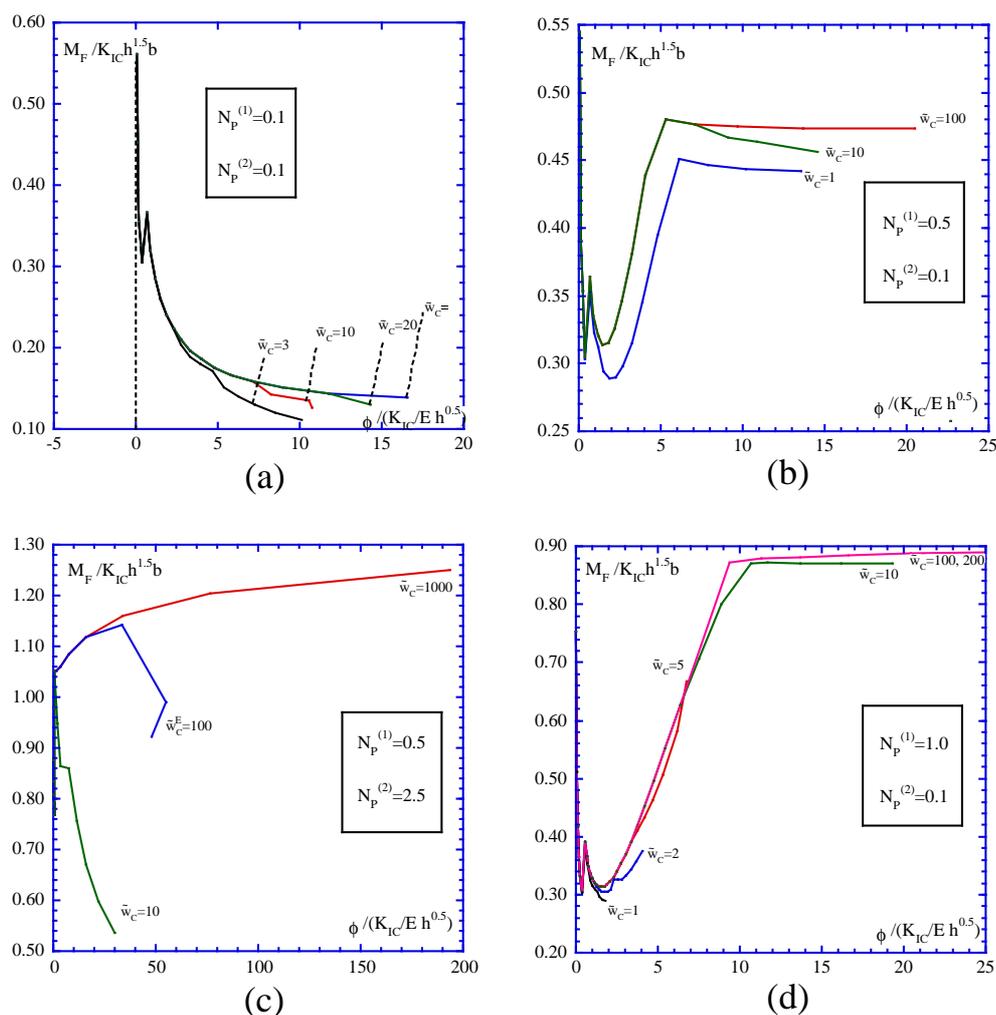


Figura 6. Momento di propagazione in funzione della rotazione al variare di \tilde{w}_c , per quattro differenti combinazioni di $N_P^{(1)}$ e $N_P^{(2)}$.

un avanzamento lento della fessura è possibile solo incrementando il carico applicato. La profondità della fessura in corrispondenza del minimo della curva aumenta al decrescere del numero di fragilità $N_P^{(2)}$. Questo risultato è in accordo con le curve ottenute da Carpinteri e Massabó [4] in presenza di sole fibre. I cerchi pieni nella stessa figura indicano invece i punti in cui le barre di armatura si plasticizzano. Si può osservare come i punti di plasticizzazione traslino verso profondità di fessure maggiori e momenti di propagazione della fessura maggiori al crescere del numero di fragilità associato alla percentuale di fibre $N_P^{(2)}$.

La seconda analisi valuta l'influenza del numero di fragilità $N_P^{(1)}$. In fig.5.a si riportano le curve momento di propagazione in funzione della profondità della fessura fissati i valori del numero di fragilità $N_P^{(2)} = 0.1$ e l'apertura critica al variare del numero di fragilità $N_P^{(1)}$ tra 0.1 e 1.0. Come nel caso precedente, il momento di propagazione della fessura mostra un asintoto verticale per $\xi \rightarrow 0$. Anche in questo caso si evidenzia una discontinuità verticale per $\xi = 0.1$, quando la fessura raggiunge l'armatura longitudinale. Dopo questo picco, il

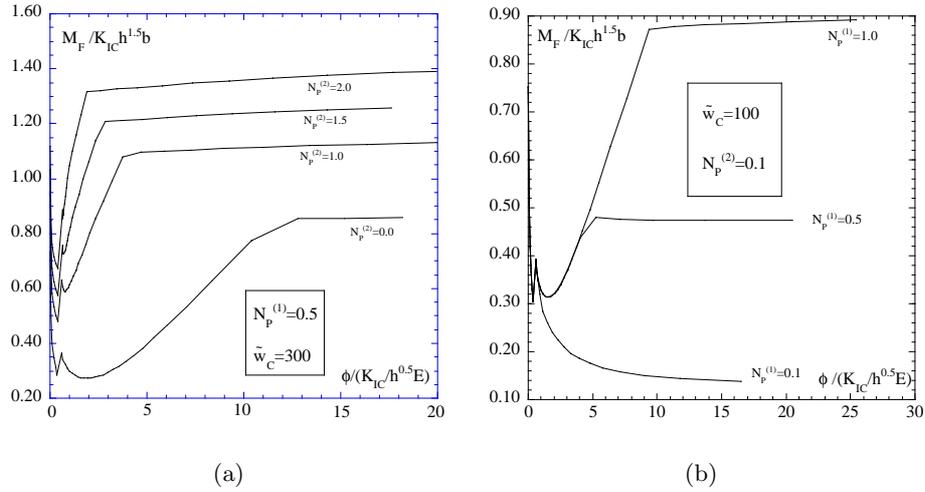


Figura 7. Momento di propagazione in funzione della rotazione, (a) al variare di $N_P^{(2)}$, con $N_P^{(1)}=0.5$ e $\tilde{w}_c=300$ e (b) al variare di $N_P^{(1)}$, con $\tilde{w}_c=100$ e $N_P^{(2)}=0.1$.

momento di propagazione della fessura diminuisce per profondità di fessura crescenti. L'elemento con $N_P^{(1)}=0.1$ è caratterizzato da una propagazione instabile della fessura per qualsiasi profondità della fessura stessa, dal momento che l'armatura principale si plasticizza in corrispondenza del salto verticale per $\xi = 0.1$. Gli altri due elementi presentano una propagazione instabile per $\xi < 0.3$, dopo di che il momento di propagazione della fessura cresce e si passa in un regime di propagazione stabile della fessura. Si può notare come le curve che rappresentano la risposta flessionale presentino un drastico cambio di direzione non appena l'armatura si plasticizza. Anche queste curve sono in accordo con i risultati ottenuti da Carpinteri e Bosco [3] per sezioni armate solamente con barre.

Nel terzo caso, i due numeri di fragilità $N_P^{(1)}$ e $N_P^{(2)}$ sono mantenuti costanti, mentre il parametro \tilde{w}_c viene fatto variare tra 1 e 200 (fig.5.b). La forma di queste curve è la stessa per tutti gli elementi, anche se per $\tilde{w}_c < 10$, le curve si distaccano mostrando una minore tenacità. La risposta strutturale per $\tilde{w}_c=100$ e $\tilde{w}_c=200$ è praticamente analoga. Ciò significa che per questa particolare geometria e per i tipi di armatura primaria e secondaria ipotizzati (valore molto basso di $N_P^{(2)}$) ogni ulteriore incremento di \tilde{w}_c appare inutile.

Da un punto di vista ingegneristico, appare molto interessante considerare i diagrammi momento di propagazione della fessura in funzione della rotazione localizzata (figure 6,7). Come nelle precedenti analisi, per ciascuna figura solo uno dei tre parametri che governano la risposta strutturale viene fatto variare, mentre i due rimanenti vengono mantenuti fissi.

L'influenza di \tilde{w}_c è presentata in fig.6, dove sono stati selezionati quattro diversi casi, con differenti combinazioni di $N_P^{(1)}$ e $N_P^{(2)}$. In fig.6.a vengono presentati i comportamenti di elementi con valori molto bassi di entrambi i due numeri di fragilità. Anche in questo caso, il momento di propagazione mostra un asintoto verticale per $\phi \rightarrow 0$ ($\xi \rightarrow 0$), così come si osserva un salto verticale quando la fessura attraversa l'armatura longitudinale. Dopo questo salto è evidente una propagazione instabile della fessura, come nel caso della fig.5.a, per tutti i valori di \tilde{w}_c . Analoghi comportamenti possono essere osservati in fig.6.b e fig.6.c, con $N_P^{(2)}=0.1$ e $N_P^{(1)}=0.5$ e 1.0, rispettivamente. Solo per valori sufficientemente elevati di $N_P^{(2)}$, relativo al rinforzo secondario,

fig.6.d ($N_P^{(2)}=2.5$), l'influenza di \tilde{w}_c è più forte e risulta evidente una transizione fragile-duttile per valori di \tilde{w}_c crescenti di due ordini di grandezza.

La fig.7.a mostra i diagrammi del momento di propagazione della fessura adimensionale in funzione della rotazione localizzata per $N_P^{(1)}=0.5$ e $\tilde{w}_c=300$ con quattro differenti valori di $N_P^{(2)}$. La prima rappresenta una sezione trasversale in calcestruzzo armato senza fibre. Per $N_P^{(2)}=1.0$ e 1.5 , dopo il picco del momento, è presente una instabilità di tipo snap-through, che scompare per valori maggiori di $N_P^{(2)}=2.0$.

In fig.7.b infine sono riportati i diagrammi del momento di propagazione della fessura adimensionale in funzione della rotazione localizzata per $\tilde{w}_c=100$, $N_P^{(2)}=0.1$ e $N_P^{(1)}=0.1, 0.5$ e 1.0 . Mentre l'elemento con $N_P^{(1)}=0.1$, dopo il momento di picco mostra una propagazione della fessura instabile, una instabilità di tipo snap-through è presente per $N_P^{(1)}=0.5$ e 1.0 . Naturalmente, maggiore risulta essere il numero di fragilità, maggiore sarà il momento di propagazione della fessura in corrispondenza della plasticizzazione delle barre di armatura.

5. Conclusioni

Il modello proposto rappresenta una estensione del bridged-crack model al caso di contemporanea presenza di armature metalliche e di fibre di rinforzo nella matrice cementizia. Il modello riproduce la risposta strutturale di elementi inflessi in calcestruzzo ad alte prestazioni e/o fibro-rinforzato. In particolare, poichè i parametri sono di immediato significato fisico e di semplice determinazione sperimentale, esso si presta allo studio delle proprietà meccaniche, quali la resistenza e la duttilità, e dei regimi di propagazione della fessura, in funzione della composizione del calcestruzzo, della tipologia e della densità delle fibre di rinforzo, della disposizione e delle caratteristiche delle armature principali e delle dimensioni dell'elemento strutturale. Tali informazioni consentono di ottimizzare il rapporto tra armature tradizionali e fibre nel design di travi inflesse.

BIBLIOGRAFIA

1. Carpinteri, A. A fracture mechanics model for reinforced concrete collapse. Proceedings of the I.A.B.S.E. Colloquium on Advanced Mechanics of reinforced Concrete, Delft, p. 17-30, 1981.
2. Carpinteri, A. Stability of fracturing process in RC beams. *Journal of Structural Engineering (ASCE)* 110: 544-558, 1984.
3. Bosco, C., Carpinteri, A. Discontinuous constitutive response of brittle matrix fibrous composites. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 43: 261-274, 1995.
4. Carpinteri, A., Massabó, R. Continuous vs discontinuous bridged-crack model for fiber-reinforced materials in flexure. *International Journal of Solids and Structures* 34: 2321-2338, 1997.
5. Carpinteri, A., Ferro, G., Ventura, G. Size effects on flexural response of reinforced concrete elements with a nonlinear matrix. *Engineering Fracture Mechanics*, in stampa, 2002.
6. Ferro, G. Multilevel bridged crack model for high-performance concretes. *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*, in stampa, 2002.
7. Okamura, H., Watanabe, K., Takano, T. Deformation and strength of cracked member under bending moment and axial force. *Engineering Fracture Mechanics* 7: 531-539, 1975.
8. Tada, H., Paris, P.C., Irwin, G. *The Stress Analysis of Cracks Handbook*. Paris Productions Incorporated (and Del Research Corporation), St. Louis, Missouri, 1963.
9. Carpinteri, A., Massabó, R. Bridged versus cohesive crack in the flexural behavior of brittle-matrix composites. *International Journal of Fracture* 81: 125-145, 1996.
10. A.H. Stroud. *Approximate Calculation of Multiple Integrals*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1971.
11. R. Cools, A. Haegemans, CUBPACK: a package for automatic cubature; framework description, submitted for publication.