

LA PROGETTAZIONE A FATICA MULTIASSIALE DI COMPONENTI INTAGLIATI: LO STATO DELL'ARTE

L. Susmel¹, R. Tovo¹, V. Crupi²

¹Dipartimento di Ingegneria, Università di Ferrara, Via Saragat 1, 44100 Ferrara.

²Dipartimento di Chimica Industriale ed Ingegneria dei Materiali, Università di Messina

ABSTRACT

In this paper the problem of the fatigue assessment of notched components subjected to multiaxial loadings is reviewed. In particular, the attention is focused on a critical re-analysis of some criteria valid either in the ambit of high-cycle fatigue, that is, criteria capable of estimating the multiaxial fatigue limit, or in the ambit of low-cycle fatigue.

SOMMARIO

In questo lavoro viene presentata una panoramica sulle problematiche connesse con la progettazione a fatica di componenti intagliati sollecitati da carichi multiassiali. In particolare l'attenzione viene focalizzata su alcuni criteri di verifica a fatica validi o nel campo della vita ad alto numero di cicli, ovvero capaci di stimare il limite di fatica multiassiale, o nel campo della vita a termine.

SIMBOLOGIA

Oxyz	= sistema di riferimento assoluto	W_e^+	= densità di energia elastica positiva per ciclo
ϕ, θ	= angoli individuanti la posizione di un piano nello spazio	N_f	= numero di cicli a rottura
ϕ^*, θ^*	= angoli individuanti la posizione del piano critico nello spazio	$\sigma_{A\infty}$	= limite di fatica assiale
$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$	= componenti normali istantanee del tensore degli sforzi	$\tau_{A\infty}$	= limite di fatica a torsione
$\tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}$	= componenti tangenziali istantanee del tensore degli sforzi	σ_T	= tensione di rottura
$\epsilon_{1,a}$	= ampiezza delle deformazione principale massima	σ_y	= tensione di snervamento
γ_a	= ampiezza della deformazione tangenziale relativa ad un generico piano	E	= modulo di elasticità
$\epsilon_{n,a}$	= ampiezza della deformazione normale ad un generico piano	G	= modulo di elasticità tangenziale
$\sigma_{n,max}$	= valore massimo della tensione normale ad un generico piano	ν_e, ν_p	= coefficienti di Poisson elastico e plastico
W_p	= densità di energia plastica per ciclo	σ'_f	= coefficiente di resistenza a fatica
		ϵ'_f	= coefficiente di duttilità a fatica
		b	= esponente di resistenza a fatica
		c	= esponente di duttilità a fatica
		τ'_f	= coefficiente di resistenza a fatica a taglio
		γ'_f	= coefficiente di duttilità a fatica a taglio
		b_0	= esponente di resistenza a fatica a taglio
		c_0	= esponente di duttilità a fatica a taglio
		C, S, k, α	= costanti di calibrazione dei criteri

INTRODUZIONE

La presenza di un intaglio in un componente meccanico genera un campo di tensione multiassiale nell'intorno dell'apice dell'intaglio stesso anche quando la sollecitazione

esterna applicata è monoassiale. La verifica a fatica in tali condizioni può essere, comunque, eseguita facendo riferimento ad un'unica componente di tensione, ovvero utilizzando la componente ortogonale alla bisettrice dell'intaglio stesso [1].

La complessità del campo di tensione può, però, essere ulteriormente incrementata dalla presenza di stati di sollecitazione anche esternamente multiassiali e in questa situazione la tensione (o la deformazione) principale massima o la tensione ortogonale alla bisettrice non sono più sufficienti da sole a predire correttamente la vita a fatica del componente.

In letteratura sono state presentate diverse metodologie per eseguire la progettazione a fatica in presenza di componenti intagliati sollecitati da carichi multiassiali, tuttavia si deve, già da subito, sottolineare come quanto presentato risulta ancora molto frammentario e, comunque, mai esaustivo.

Il problema in analisi può, in ogni caso, essere scomposto in tre sottoproblemi [2, 3]: studio della modalità di innesco e propagazione della cricca, stima delle tensioni all'apice dell'intaglio e previsione della vita a fatica.

Il primo problema si presenta molto complesso poiché sia l'innesco che la propagazione della cricca risultano influenzati dalla combinazione di un elevato numero di parametri che, a seconda del materiale, possono avere influenza diversa sulla nascita e sullo sviluppo della cricca [3]. In termini progettuali, poi, il diverso modo di propagare, al variare dello stato di sollecitazione multiassiale, si traduce in una difficile valutazione del *fatigue notch factor*, K_f [4, 5].

Nel caso, invece, della stima dello stato locale di tensione e deformazione il problema può essere risolto o mediante un approccio agli elementi finiti, oppure utilizzando metodi adatti a stimare le componenti reali di tensione o deformazione [6] note che siano le tensioni nominali (metodo di Hoffmann e Seeger [7]) oppure noti che siano i carichi esternamente applicati (metodo di Köttingen, Barkey e Socie [8]).

Tuttavia, se, da un lato, tutti questi metodi sembrano dare ottimi risultati nel caso di sollecitazioni in fase, nulla ancora di certo si può dire sulla loro affidabilità in presenza di sollecitazioni fuori fase, poiché la precisione nella ricostruzione degli stati di tensione e deformazione all'apice dell'intaglio varia al variare della quantità di deformazione plastica presente in prossimità dell'intaglio stesso [3].

Resta, infine, da risolvere il problema della previsione della vita a fatica. Lo stato dell'arte mostra come l'ingegnere progettista possa scegliere, di fatto, tra tre diversi approcci: il primo incentrato sull'uso delle tensioni nominali corrette mediante il K_f o il K_t , il secondo incentrato sugli approcci basati sul calcolo delle deformazioni e delle tensioni all'apice dell'intaglio e, infine, l'ultimo, di recentissima formulazione, basato su un approccio volumetrico.

Si può subito comprendere con facilità che le prime due tipologie di approcci risultano affette dai problemi brevemente discussi sopra. Infatti, nel primo caso il valore di K_f e il K_t varia, a parità di geometria, al variare delle modalità di propagazione della cricca; nel secondo caso, invece, la precisione dei criteri nella verifica a fatica è affetta dalla precisione nella stima dello stato di tensione e deformazione calcolato in campo elasto-plastico all'apice dell'intaglio.

L'oggetto del presente studio, alla luce di quanto brevemente discusso sopra, è l'analisi dei criteri per progettazione a fatica multiassiale in presenza di intagli. In particolare lo studio è stato suddiviso in tre sezioni: verifica mediante tensioni nominali, verifica noti gli stati locali di tensione e deformazione, verifica mediante l'approccio volumetrico.

SISTEMI DI RIFERIMENTO E DEFINIZIONI PRELIMINARI

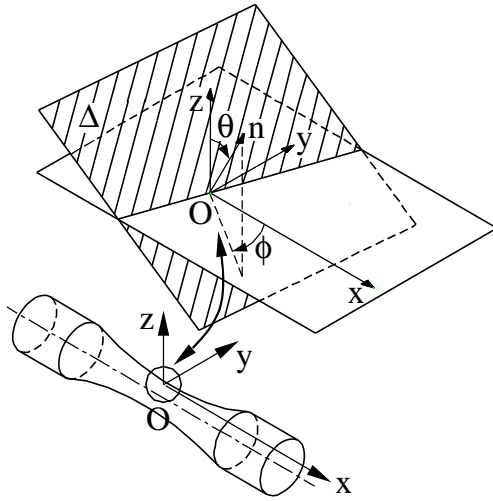


Figura 1: sistema di riferimento e definizione degli angoli ϕ e θ .

Per definire il sistema di riferimento assoluto si consideri un provino cilindrico; la terna $Oxyz$ abbia come origine un punto superficiale O che si ipotizza essere il punto di possibile innesco della cricca per fatica (fig. 1). Fissato tale sistema di riferimento, un generico piano Δ di normale \mathbf{n} e passante per il punto O può essere individuato tramite gli angoli ϕ e θ (fig. 1): l'angolo ϕ è l'angolo formato dalla proiezione della normale \mathbf{n} sul piano xy e l'asse delle x , mentre l'angolo θ è l'angolo formato dalla normale \mathbf{n} a Δ e l'asse delle z . In base a queste assunzioni gli infiniti piani contenenti il punto O possono essere esplorati facendo variare ϕ tra 0 e 2π e θ tra 0 e π [9].

CRITERI DI RESISTENZA BASATI SULL'USO DELLE TENSIONI NOMINALI

Prima di entrare nel vivo della trattazione del problema della progettazione a fatica multiassiale di componenti intagliati mediante le tensioni nominali, è opportuno sottolineare come in tutte le formulazioni, che verranno di seguito introdotte, i limiti di fatica assiale e torsionale sono quelli relativi al componente intagliato, ovvero sono i valori dei limiti di fatica del materiale base corretti mediante gli opportuni valori dei corrispondenti K_f , mentre le tensioni da utilizzare nel calcolo sono sempre quelle nominali nette.

Uno dei primi criteri utilizzati per la progettazione a fatica multiassiale di componenti intagliati è stato quello di Von Mises adattato al caso della fatica biassiale [2, 3]:

$$\sqrt{\sigma_{x,a}^2 + 3\tau_{xy,a}^2} \leq \sigma_{A\infty} \quad (1)$$

Tuttavia, il criterio sicuramente più famoso e utilizzato per progettare componenti intagliati sollecitati da carichi di flessione-torsione in fase è il criterio proposto da Gough [10] e basato sulla rianalisi di un elevatissimo numero di prove sperimentali eseguite su provini intagliati di diversa geometria e realizzati con materiali diversi. In termini sintetici il criterio di Gough per componenti intagliati può essere espresso mediante l'equazione di un arco di ellisse, ovvero:

$$\left(\frac{\tau_{xy,a}}{\tau_{A\infty}}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{x,a}}{\sigma_{A\infty}}\right)^2 \left(\frac{\sigma_{A\infty}}{\tau_{A\infty}} - 1\right) + \left(\frac{\sigma_{x,a}}{\sigma_{A\infty}}\right) \left(2 - \frac{\sigma_{A\infty}}{\tau_{A\infty}}\right) = 1 \quad (2)$$

Il criterio proposto da Gough, però, non permette di dare nessuna interpretazione fisica al fenomeno, e proprio per superare questo problema Guest [11], qualche anno dopo, ha reinterpretato l'equazione (2) in termini di approccio di piano critico, definito come il piano sul quale si ha la massima ampiezza della deformazione tangenziale.

$$\frac{1}{2} \left[\sqrt{\sigma_{x,a}^2 + \tau_{xy,a}^2} + \left(\frac{2\tau_{A\infty}}{\sigma_{A\infty}} \right) \sigma_{x,a} \right] \leq \tau_{A\infty} \cdot \quad (3)$$

Molto più di recente, partendo sempre da un approccio di piano critico, McDiarmid [12, 13] ha proposto una semplice formula basata su una combinazione lineare della tensione tangenziale, agente sul piano che ne sperimenta la massima ampiezza, e la tensione massima normale a tale piano:

$$\tau_a(\phi^*, \theta^*) + \frac{\tau_{A\infty}}{2\sigma_T} \sigma_{n,\max}(\phi^*, \theta^*) \leq \tau_{A\infty} \cdot \quad (4)$$

Tale formula è stata validata [13] ancora mediante le prove di flessione/torsione in fase eseguite da Gough [10], quindi, nonostante quanto dichiarato dall'Autore stesso, nulla di sicuro si può dire sulla sua affidabilità in presenza di carichi fuori fase.

L'unica relazione sviluppata appositamente per verificare componenti intagliati sollecitati da carichi sia in fase che fuori fase è quella proposta da Grubisic e Simburger [14] e fondata sull'utilizzo di un tensione equivalente, detta SEQA, ovvero:

$$SEQA = \frac{\sigma_{x,a}}{\sqrt{2}} \left[1 + \frac{3}{4} \left(\frac{2\tau_{xy,a}}{\sigma_{x,a}} \right)^2 + \sqrt{1 + \frac{3}{2} \left(\frac{2\tau_{xy,a}}{\sigma_{x,a}} \right)^2 \cos 2\delta + \frac{9}{16} \left(\frac{2\tau_{xy,a}}{\sigma_{x,a}} \right)^4} \right]^{\frac{1}{2}} \leq \sigma_{A\infty} \cdot \quad (5)$$

Tale relazione sembra essere in buon accordo con i risultati sperimentali nel caso di prove in fase, mentre nel caso di prove fuori fase la stima della vita risulta essere sempre conservativa [2].

Recentemente, Susmel e Lazzarin [15] hanno proposto un metodo basato sull'uso combinato di curve di Wöhler modificate e del concetto di piano d'innescò, definito come il piano che sperimenta il massimo valore dell'ampiezza tangenziale calcolata con il metodo della più piccola ipersfera formulato da Papadopoulos [9].

Il criterio può essere formalizzato, per la stima del limite di fatica multiassiale, come:

$$\tau_a(\phi^*, \theta^*) + \left[\tau_{A\infty} - \frac{\sigma_{A\infty}}{2} \right] \frac{\sigma_{n,\max}}{\tau_a}(\phi^*, \theta^*) \leq \tau_{A\infty} \cdot \quad (6)$$

Tale criterio si è dimostrato in ottimo accordo con i risultati sperimentali relativi a provini intagliati e sollecitati sia da carichi in fase che fuori fase [15].

APPROCCI BASATI SUL CALCOLO DI TENSIONI E DEFORMAZIONI ALL'APICE DELL'INTAGLIO

I criteri basati sul calcolo in campo elasto-plastico di tensioni e deformazioni in corrispondenza dell'apice dell'intaglio ($\sigma_{i,a}$, $\epsilon_{i,a}$) sono tutti quelli basati su approcci in deformazione o su approcci energetici.

Dopo aver stimato il valore delle tensioni e delle deformazioni calcolate in campo elasto-plastico in corrispondenza dell'apice dell'intaglio, i criteri più semplici che

possono essere applicati sono quelli basati sulla ampiezza della deformazione principale massima e sulla massima ampiezza della deformazione tangenziale, ovvero [17]¹:

$$\varepsilon_{1,a} = \frac{\sigma'_f}{E} (2N_f)^b + \varepsilon'_f (2N_f)^c \quad (7)$$

$$\gamma_a(\phi^*, \theta^*) = (1 + \nu_e) \frac{\sigma'_f}{E} (2N_f)^b + (1 + \nu_p) \varepsilon'_f (2N_f)^c, \quad (8)$$

Successivamente, però, sia Brown e Miller [18] che Socie [19] hanno osservato come la precisione della stima a fatica multiassiale possa essere incrementata introducendo nel calcolo del danneggiamento un approccio di piano critico e tenendo in considerazione le componenti di tensione e deformazione ortogonali al piano critico. I criteri di Socie e Brown e Miller possono essere formalizzati, rispettivamente, come:

$$\begin{aligned} & \gamma_a(\phi^*, \theta^*) + S \cdot \varepsilon_{n,a}(\phi^*, \theta^*) = \\ & = [1 + \nu_e + (1 - \nu_e) \cdot S] \frac{\sigma'_f - \sigma_{n,m}(\phi^*, \theta^*)}{E} (2N_f)^b + [1 + \nu_p + (1 - \nu_p) \cdot S] \varepsilon'_f (2N_f)^c \end{aligned} \quad (9)$$

$$\gamma_a(\phi^*, \theta^*) \left(1 + S \frac{\sigma_{n,\max}(\phi^*, \theta^*)}{\sigma_y} \right) = \frac{\tau'_f}{G} (2N_f)^{b_0} + \gamma'_f (2N_f)^{c_0}. \quad (10)$$

dove la costante di taratura S può essere determinata mediante prove di fatica monoassiali eseguite su provini lisci.

Partendo da considerazioni relative alla resistenza a fatica in campo monoassiale, Garud [20], per primo, e successivamente Ellyin [21] hanno formulato l'ipotesi che anche il danneggiamento per fatica multiassiale possa essere espresso come funzione della densità di energia presente in ogni ciclo di carico. In particolare, definite la densità di energia plastica ed elastica positiva mediante lo studio dei cicli di isteresi, i due criteri in esame possono essere espressi come:

$$\Delta W_p = k \cdot N_f^\alpha \quad (11)$$

$$\frac{\Delta W_p}{\rho} + \Delta W_e^+ = k \cdot N_f^\alpha + C \quad (12)$$

Il calcolo delle costanti a e b nella (11) deve essere eseguito applicando il criterio a prove di fatica di trazione. Più laboriosa si presenta, invece, la valutazione delle costanti nella relazione (12): la grandezza ρ , detta fattore di costrizione multiassiale, dipende dallo stato di tensione superficiale [21], mentre k , α e C sono costanti del materiale, ed, in particolare, C rappresenta la quota di energia non danneggiante associata al limite di fatica.

Come accennato in precedenza l'affidabilità e la precisione nell'utilizzo di tali criteri dipende unicamente dalla precisione con cui viene stimato il reale stato di tensione e deformazione all'apice dell'intaglio.

¹ In questo paragrafo le componenti di tensione e deformazione sono quelle calcolate all'apice dell'intaglio mediante analisi in campo elasto-plastico.

Questo problema è stato di recente superato da un nuovo criterio energetico formulato da Lazzarin e Zambardi [16] dove, per misurare il danneggiamento a fatica, gli Autori hanno proposto di utilizzare l'energia di deformazione elastica calcolata all'interno di un'area semicircolare avente come raggio un valore dipendente dalle proprietà del materiale.

Per quanto riguarda la precisione nella stima della vita a fatica, nulla di certo si può dire riguardo l'uso dei criteri energetici, la cui applicazione a componenti intagliati sollecitati da carichi multiassiali non è mai stata validata in modo sistematico.

Per quanto riguarda, invece, le altre metodologie, in un primo lavoro pionieristico Fash, Socie e McDowell [22] mostrarono come per provini intagliati in SAE 1045, sollecitati da carichi di flessione/torsione in fase, i criteri della massima deformazione principale, eq. (7), della massima deformazione tangenziale, eq. (8), e il criterio di Brown e Miller (fig. 2a), eq. (9), diano previsioni non-conservative nel campo della vita a basso/medio numero di cicli ($N_f < 10^5$ cicli), mentre la stima del danneggiamento a fatica diventava conservativa ad alto numero di cicli ($N_f > 10^5$ cicli).

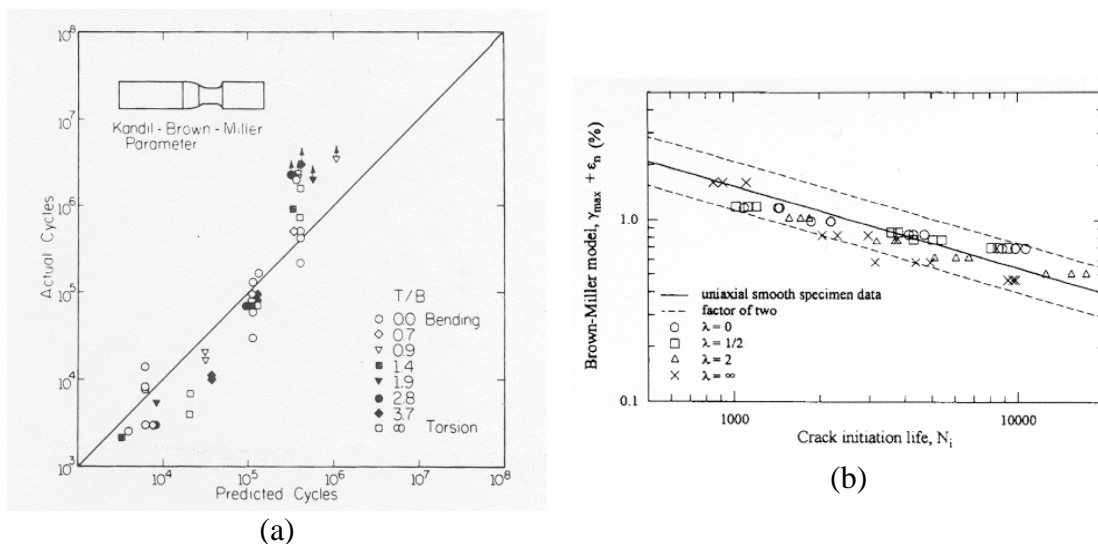


Figura 2: precisione nella stima della vita a fatica di provini in SAE 1045, sia intagliati (a) [22] che con foro trasversale (b) [24], ottenuta mediante l'applicazione del criterio di Brown e Miller [18].

Interessante è, inoltre, osservare come ad una medesima conclusione siano arrivati successivamente anche Hoffmann e Seeger [23] utilizzando, però, per stimare lo stato di tensione e deformazione locale invece che un'analisi agli elementi finiti, come fatto da Fash et al. [22], il metodo originale da loro sviluppato [7].

In un lavoro successivo Yip e Jen [24] hanno osservato come il criterio di Brown e Miller, nella formulazione data dalla (9), permetta di ottenere delle stime molto precise nella previsione della vita a fatica multiassiale nel caso di provini cilindrici in SAE 1045 con foro trasversale e sollecitati da carichi di trazione/torsione in fase, e questo nonostante la complessità dello stato tensionale presente nell'intorno del foro (fig. 2b). In questo lavoro è stata, in più, eseguita una analisi comparativa che ha permesso di evidenziare come la precisione nella stima dello stato locale di tensione e deformazione data dall'applicazione del metodo di Neuber generalizzato per il multiassiale [6, 23] non dia risultati comparabili con quelli ottenuti dalle analisi FEM, poiché è difficile definire

la posizione in cui si hanno le massime deformazioni locali mediante l'approccio di Neuber.

Infine, nel caso di provini cilindrici in AISI 316 sollecitati a trazione/torsione e aventi un intaglio ad U circonferenziale gli stessi Yip e Jen [19] hanno potuto evidenziare come il criterio più affidabile sia quello proposto da Fatemi e Socie, eq. (10), anche in presenza di componenti di tensione medie non nulle (fig. 4).

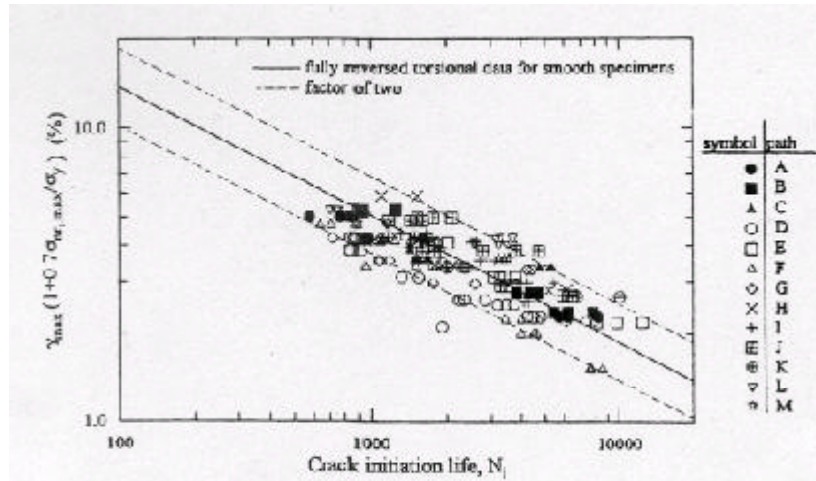


Figura 4: precisione nella stima della vita a fatica di provini in AISI 316 sia intagliati ottenuta mediante l'applicazione del criterio di Fatemi e Socie [19].

L'APPROCCIO VOLUMETRICO

L'approccio volumetrico si fonda sulla semplice idea che la tensione efficace che deve essere tenuta in considerazione per la verifica a fatica è quella ottenuta integrando il campo di tensione lungo una direzione critica per una lunghezza efficace il cui valore dipende dall'andamento del campo di tensione, ovvero dalla legge elasto-plastica che caratterizza il comportamento meccanico del materiale [26].

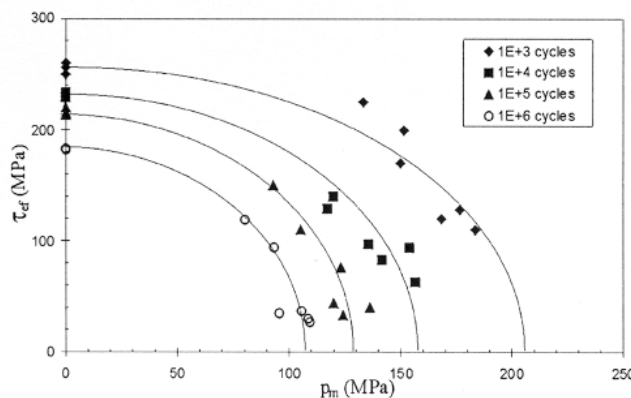


Figura 5: correlazione tra risultati sperimentali e approccio volumetrico [27].

Partendo da questa idea recentemente Quilafku et al. [27] hanno proposto un modello valido per il caso di sollecitazioni di flessione-torsione in fase, validato mediante una

accurata campagna sperimentale eseguita su provini cilindrici in acciaio con intagli circonferenziali a V e con raggi di raccordo pari, rispettivamente, a 0.2mm e 0.4mm. Secondo tale metodo la verifica a fatica può essere eseguita mediante le due seguenti grandezze:

$$\tau_{ef} = \frac{1}{x_{ef}} \int_0^{x_{ef}} \tau_{max}(x) \left(1 - \frac{x}{\tau_{max}(x)} \frac{d\tau_{max}(x)}{dx} \right) dx \quad (12)$$

$$p_m = \frac{1}{x_{ef}} \int_0^{x_{ef}} \sigma_H(x) dx \quad (13)$$

dove la distanza x_{ef} è pari alla distanza tra l'apice dell'intaglio e il punto in cui il gradiente della tensione tangenziale ha il suo primo minimo relativo.

Secondo quanto suggerito in [26], se il materiale è duttile, per un fissato numero di cicli, la combinazione tra τ_{ef} e p_m è data dall'equazione di un quarto d'ellisse, ovvero il criterio assume una struttura del tutto analoga alla classica relazione di Gough [10] valida per provini lisci in materiale duttile (fig. 5).

CONCLUSIONI

Le conclusioni del presente lavoro possono essere così brevemente riassunte:

1. I criteri basati sul calcolo delle tensioni nominali possono essere applicati con un buon margine di sicurezza per componenti sollecitati da carichi in fase. Nel caso di carichi fuori fase o, comunque, non proporzionali la loro applicazione porta a stime non conservative della vita a fatica;
2. Il criterio energetico proposto da Lazzarin e Zambardi sembra essere molto promettente nel campo della progettazione a fatica multiassiale, risultando facilmente applicabile anche in presenza di raggi di raccordo tendenti a zero (come nel caso delle saldature);
3. I metodi per stimare lo stato di tensione e deformazione all'apice dell'intaglio possono essere applicati con sicurezza solo ad intagli blandi, sollecitati da carichi in fase e nel campo della fatica a basso numero di cicli;
4. La precisione dei criteri che usano tensioni e deformazioni calcolate all'apice dell'intaglio dipende dai metodi usati per stimare il campo di tensione o deformazione nel punto critico;
5. I criteri di Fatemi-Socie e di Borwn-Miller sembrano essere i più affidabili per la stima della vita a fatica multiassiale di componenti intagliati sollecitati da carichi in fase, quando la stima delle tensioni e delle deformazione locali viene eseguita mediante gli elementi finiti;
6. Il metodo volumetrico, molto interessante dal punto di vista teorico, richiederebbe una validazione più sistematica onde poter essere applicato a componenti reali;
7. Poco, o nulla, si può dire sulla verifica a fatica di componenti intagliati sollecitati da carichi multiassiali fuori fase
8. Il criterio di Susmel-Lazzarin permette di ottenere una buona precisione nella stima del limite di fatica multiassiale anche in presenza di sollecitazioni fuori fase,

sfruttando tutti i vantaggi che derivano dall'utilizzo nel calcolo delle tensioni nominali;

BIBLIOGRAFIA

1. Taylor D. , “*Geometrical effects in fatigue: a unifying theoretical model*”. Int. J. Fatigue 1999, **21** 413-420.
2. Tipton S. M., Nelson D. V., “*Fatigue Life Predictions for Notched Shaft in Combined Bending and Torsion*”. ASTM STP 853 1985, 514-550.
3. Tipton S. M., Nelson D. V., “*Advances in multiaxial fatigue life prediction for components with stress concentration*”. Int. J. Fatigue 1997, **19** 6 503-515.
4. Nisitani H., Kawano K., “*Non-propagating crack and crack strength of shaft with shoulder fillet subjected to rotary bending*”. 11th Japan Congress on Materials Research-Metallic Materials, March 1968, 49-51.
5. Kawano K., Nisitani H., “*Fatigue limit and non-propagating crack and torsional fatigue of notched or shouldered specimens*”. 13th Japan Congress on Materials Research-Metallic Materials, March 1970, 73-76.
6. Bissacco G., “*Analisi teorica dei criteri di resistenza a fatica multiassiale e studio comparato degli attuali codici di previsione di vita a fatica*”. Tesi di Laurea, Università di Padova, 2000.
7. Hoffmann M., Seeger T., “*Estimating Multiaxial Elastic-Plastic Notch Stresses and Strains in Combined Loading. Biaxial and Multiaxial Fatigue*”. EGF 3, Mechanical Engineering Publications, London 1989, 3-24.
8. Kötting V. B., Barkey M. E., Socie D. F., “*Pseudo Stress and Pseudo Strain Based Approaches to Multiaxial Notch Analysis*”. Fatigue Fract. Engng. Mater. Struct. 1995, **18** 9 981-1006.
9. Papadopoulos I.V., “*Critical Plane Approaches in High-Cycle Fatigue: on the Definition of the Amplitude and Mean Value of the Shear Stress Acting on the Critical Plane*”. Fatigue Fract. Engng. Mater. Struct. 1998, **21** 269-285.
10. Gough H. J., “*Engineering Steels under Combined Cyclic and Static stresses*”. Proc. Inst. Mech. Engrs. 1949, 417-440.
11. Guest J. J., Proceedengs, Institution of Mechanical Engineers 1949, **160** 416-440.
12. McDiarmid D. L., “*A general criterion for high-cycle multiaxial fatigue failure*”. Fatigue Fract. Engng. Mater. Struct. 1991, **14** 429-453.
13. McDiarmid D. L., “*A shear stress based critical-plane criterion of multiaxial fatigue failure for design and life prediction*”. Fatigue Fract. Engng. Mater. Struct. 1994, **17** 1475-1484.
14. Grubisic V., Simburger A., “*Fatigue under combined out-of-phase multiaxial stress*”. Fatigue and Testing Design, Vol. 2, Proc. S.E.E. Int. Conf. 5, London, 1976, 27.1-27.8.
15. Susmel L., Lazzarin P., “*A Bi-Parametric Modified Wöhler Curve for High Cycle Multiaxial Fatigue Assessment*”. Fatigue Fract. Engng. Mater. Struct. 2002, **25** 63-78.
16. Lazzarin P., Zambardi R., “*A finite-volume-energy based approach to predict the static and fatigue behaviour of components with sharp V-shaped notches*”. Int. J. Fracture 2001, **112** 275-298.
17. Susmel L., “*Comparazione quantitativa di criteri di resistenza a fatica multiassiale per vita a termine*”. Atti del XXIX Convegno Nazionale AIAS, Lucca (Italy), 2000, 425-434.
18. Brown M. W., Miller K. J., Proceeding, Institution of Mechanical Engineers 1973, **187** 754-755.
19. Fatemi A., Socie D. F., “*A critical plane approach to multiaxial fatigue damage including out-of-phase loading*”. Fatigue Fract. Engng Mater Struct. 1988, **11** 149-165.
20. Garud Y. S., “*A New Approach to the Evaluation of Fatigue Under Multiaxial Loadings*”. Transactions of the ASME, Journal of Engineering Materials and Technology 1981, **103** 118-125.
21. Ellyin F., Xia Z., “*A General Fatigue Theory and Its Application to Out-of-Phase Cyclic Loading*”. Trans. ASME, Journal of Engineering Materials and Technology 1993, **115** 411-416.
22. Fash J. W., Socie D. F., McDowell D. L., “*Fatigue Life Estimates for a Simple Notched Component Under Biaxial Loading*”. ASTM STP 853 1985, 497-513.
23. Hoffmann M., Seeger T., “*Stress-Strain Analysis and Life Predictions of a Notched Shaft under Multiaxial Loading*”. Multiaxial Fatigue. Edited by G. E. Leese & D. F. Socie. Society of Automotive Engineers 1989, 81-96.

24. Yip M. C., Jen Y. M., "*Biaxial fatigue crack initiation life prediction of solid cylindrical specimens with transverse circular holes*". Int. J. of Fatigue 1996, **18** 2 111-117.
25. Yip M. C., Jen Y. M., "*Mean stress effect on crack initiation lives for notched specimen under biaxial nonproportional loading path*". Trans. of the ASME, Journal of Engineering Materials and technology 1997, **119** 104-112.
26. Quilafku G., Azari Z., Kadi N., Gjonaj M., Pluinage G., "*Application of a new model proposal for the fatigue life prediction on notches and key-seats*". Int. J. Fatigue 1999, **21** 8 753-760.
27. Quilafku G., Kadi N., Dobranski J., Azari Z., Gjonaj M., Pluinage G., "*Fatigue specimen subjected to combined loading. Role of hydrostatic pressure*". Int. J. Fatigue 2001, **23** 8 689-701.