

# **ANALISI DI FESSURE OBLIQUE PARZIALMENTE CHIUSE SOTTO UN CARICO MOBILE SULLA SUPERFICIE**

M. Beghini<sup>1</sup>, L. Bertini<sup>1</sup>, V. Fontanari<sup>2</sup>

<sup>1</sup> *Dip di Ingegneria Meccanica, Nucleare e Produzione – Università di Pisa Via Diotisalvi 2 - 56126 Pisa*

<sup>2</sup> *Dip. di Ingegneria dei Materiali - Università di Trento Via Mesiano 77 – 38050 Trento (Italy)*

## **ABSTRACT**

An application of the Weight Function (WF) method for studying the problem of an edge crack inclined with respect to the external surface is presented. Starting from a matrix like structure of the WFs, an analytical expression of the Green functions, giving the Crack Opening Displacement (COD) components for the crack under general loading conditions was obtained.

These formulations were adopted for facing the problem of a travelling load applied on the boundary of a semi-plane carrying an inclined edge crack. By means of an iterative procedure, the closed portions of the crack and the effects exerted by the normal and friction contact forces on COD and on the effective stress intensity factors (SIFs)  $K_I$  and  $K_{II}$  were evaluated. Considering different friction conditions in the sliding crack surface, the evolution of  $K_I$  and  $K_{II}$  was analysed at different positions of the load.

## **SOMMARIO**

In questo lavoro viene presentata un'applicazione del metodo delle funzioni peso per lo studio di fessure superficiali inclinate rispetto alla normale alla superficie. Partendo da una formulazione matriciale delle funzioni peso, è stata ottenuta una espressione analitica delle funzioni di Green con cui è possibile calcolare le componenti di spostamento relativo delle superfici della fessura (crack opening displacements (COD)) per condizioni di carico del tutto generiche.

Mediante questi strumenti è stato affrontato il problema di una forza concentrata che si muove sulla superficie di un semipiano contenente una fessura superficiale obliqua. Attraverso una procedura iterativa sono state individuate le porzioni chiuse della fessura e l'effetto delle azioni normali e di attrito sul COD e sui valori effettivi dei fattori di intensificazione degli sforzi (FIS)  $K_I$  e  $K_{II}$ . Ipotizzando diverse condizioni di attrito nello scorrimento relativo tra le superfici della fessura è stata valutata l'evoluzione di  $K_I$  e  $K_{II}$  prodotta dal movimento della forza applicata rispetto alla posizione della fessura.

## **INTRODUZIONE**

La presenza di fessure superficiali inclinate rispetto alla normale alla superficie si riscontra in molti componenti meccanici. Questa tipologia di difetti può essere ricondotta al danneggiamento per fatica superficiale o per usura e può essere osservata, ad esempio, sul fianco dei denti delle ruote dentate o sulle piste dei cuscinetti di

rotolamento. Per questi componenti la condizione di carico può essere schematizzata, con buona approssimazione almeno per difetti di dimensione non eccessivamente piccole, da una forza puntiforme che passa periodicamente sulla bocca della fessura (si pensi alla forza di contatto esercitata dai corpi volventi di un cuscinetto in moto all'interno della pista). Per la maggior parte delle geometrie di fessura e delle condizioni di carico, la determinazione dei FIS in questi casi appare piuttosto complessa a causa della presenza di modo misto (I e II) dovuta alla mancanza di simmetria [1,....,4] e a condizioni in cui la fessura risulta parzialmente chiusa. La parziale chiusura impone di valutare le azioni normali e di attrito che si scambiano i labbri della fessura e di considerarne gli effetti sul FIS. Questo rende il problema altamente non lineare [5,....,7]. Per calcolare i FIS in una fessura di bordo inclinata è stata proposta dagli autori [3] una forma matriciale analitica approssimata delle funzioni peso. Partendo da questa formulazione è stata successivamente ottenuta una espressione delle funzioni di Green basata su integrali simbolici, risolvibili in modo iterativo, tramite i quali sono calcolabili le componenti di spostamento relativo delle superfici della fessura (crack opening displacements COD) in condizioni di carico generiche [8].

Nel caso di fessure normali alla superficie, sollecitate da un carico generico di tipo simmetrico, Beghini et al. [9,10] hanno proposto un metodo basato su una procedura iterativa, che si è rivelato accurato ed efficiente per valutare le zone di contatto, le azioni scambiate tra le superfici a contatto e i valori di FIS[7,11].

In questo lavoro la metodologia sviluppata viene estesa al caso di una fessura superficiale genericamente inclinata sotto l'azione di una forza concentrata in moto sulla superficie. Il problema, risolto in [12] in modo semplificato trascurando gli effetti non lineari, viene analizzato in forma completa sfruttando le potenzialità offerte dalla disponibilità delle funzioni di Green per il calcolo delle componenti del COD. La possibilità di determinare le componenti di COD ha permesso infatti di generalizzare anche al caso asimmetrico la procedura iterativa proposta in [9,10] per la determinazione delle azioni normali e di attrito scambiate nelle porzioni chiuse della fessura. Ipotizzando diverse condizioni di attrito nello scorrimento relativo tra le superfici della fessura è stata valutata l'evoluzione di  $K_I$  e  $K_{II}$  durante un ciclo di carico dovuto al movimento della forza applicata rispetto alla posizione della fessura.

## **1. FONDAMENTI TEORICI**

### **1.1 Valutazione del FIS e delle componenti del COD**

In base alle proprietà generali del campo elastico, per una generica fessura completamente aperta, i parametri meccanici della frattura possono essere ottenuti applicando ai labbri della fessura le tensioni nominali, ovvero le tensioni agenti nello stesso corpo non fessurato. Nel caso di parziale (o totale) contatto alle tensioni nominali devono essere aggiunte le azioni mutue tra le superfici della fessura. Nel caso di un difetto superficiale obliquo di lunghezza  $a$  (Fig. 1), scelto l'angolo di inclinazione rispetto alla normale  $\theta$ , in presenza delle componenti nominali di tensione  $\sigma(x), \tau(x)$  si può scrivere:

$$\begin{pmatrix} K_I(a) \\ K_{II}(a) \end{pmatrix} = \int_0^a \begin{pmatrix} h_{I\sigma}(x,a) & h_{I\tau}(x,a) \\ h_{II\sigma}(x,a) & h_{II\tau}(x,a) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sigma(x) \\ \tau(x) \end{pmatrix} \cdot dx = \int_0^a [W(x,a)] \cdot [S(x)] \cdot dx \quad (1)$$

dove  $h_{M\mu}(x,a)$  (con  $M=I$  o  $II$  e  $\mu=\sigma$  o  $\tau$ ) rappresentano i termini delle funzioni peso il cui significato con la relativa espressione in forma di serie troncata di potenze sono riportati in [3].

Sulla base di questa definizione delle funzioni peso, le componenti  $u$  e  $v$  del COD, che rappresentano rispettivamente lo spostamento relativo delle superfici della fessura, in direzione tangenziale e normale alle superfici stesse, possono essere calcolati come segue [8,13,14]:

$$v(x,a) = \frac{2}{H} \int_x^a [h_{I\sigma}(x,b) \cdot K_I(b) + h_{II\sigma}(x,b) \cdot K_{II}(b)] db \quad (2)$$

$$u(x,a) = \frac{2}{H} \int_x^a [h_{I\tau}(x,b) \cdot K_I(b) + h_{II\tau}(x,b) \cdot K_{II}(b)] db \quad (3)$$

in cui  $H$  è uguale a  $E$  (Modulo di Young) per stato piano di tensione e  $E/(1-\nu^2)$  per stato piano di deformazione.

Introducendo le espressioni (1) per  $K_I$  e  $K_{II}$  in (2) e (3), cambiando l'ordine di integrazione si ottiene :

$$\begin{pmatrix} v(x,a) \\ u(x,a) \end{pmatrix} = \frac{2}{H} \cdot \int_0^a \left[ \int_{\max(x,x')}^a [W(x,b)]^T \cdot [W(x,b)] db \right] \cdot \begin{pmatrix} \sigma(x') \\ \tau(x') \end{pmatrix} \cdot dx' \quad (4)$$

in cui  $[ ]^T$  rappresenta la matrice trasposta. L'equazione (5) si può riscrivere in questa forma:

$$\begin{pmatrix} v(x,a) \\ u(x,a) \end{pmatrix} = \frac{2}{H} \cdot \int_0^a [G(x,x')] \cdot \begin{pmatrix} \sigma(x') \\ \tau(x') \end{pmatrix} \cdot dx' \quad (5)$$

in cui si può riconoscere come la matrice:

$$[G(x,x')] = \begin{pmatrix} G_{v\sigma}(x,x') & G_{v\tau}(x,x') \\ G_{u\sigma}(x,x') & G_{u\tau}(x,x') \end{pmatrix} = \int_{\max(x,x')}^a [W(x,b)]^T \cdot [W(x,b)] db \quad (6)$$

rappresenti la funzione di Green che lega il carico applicato alle superfici della fessura, con i relativi spostamenti. In [8] è riportata l'espressione di  $[G(x,x')]$  sotto forma di integrali che possono essere risolti in modo ricorsivo, ed è descritto l'approccio utilizzato per la soluzione numerica dell'equazione integrale (5), basato sulla suddivisione della fessura in  $m$  intervalli contigui per ognuno dei quali si considera il valor medio delle quattro grandezze ( $u,v,\sigma,\tau$ ) due delle quali sono incognite. Il procedimento di discretizzazione conduce alla determinazione di  $2m \times 2m$  coefficienti di

influenza che rappresentano il COD medio su un generico intervallo prodotto da tensioni unitarie normali e tangenziali unitarie applicate a un qualunque intervallo. Viene così costruita una matrice che può essere scomposta in 4 sub-matrici simmetriche:

$$M = \begin{bmatrix} M^{(v\sigma)} & M^{(v\tau)} \\ M^{(u\sigma)} & M^{(u\tau)} \end{bmatrix} \quad (7)$$

in cui, ad esempio, il componente  $M_{ij}^{(v\sigma)}$  ( con  $i, j = 1, \dots, m$ ) rappresenta il valor medio del componente  $v$  del COD nell'intervallo  $i^{\text{esimo}}$  dovuto ad una azione normale  $\sigma$  unitaria applicata all'intervallo  $j^{\text{esimo}}$

In tal modo detto (S) il vettore con  $2m$  componenti contenente le componenti di tensione normale e tangenziale sugli intervalli in cui è suddivisa la fessura, i corrispondenti COD medi (C) si ricavano direttamente da:

$$(C) = [M](S) \quad (8)$$

## 1.2 Analisi delle condizioni di fessura parzialmente chiusa

Disponendo della formulazione analitica della funzione di Green, si può generalizzare al caso asimmetrico della fessura inclinata la procedura iterativa proposta in [9,10] per una configurazione simmetrica bidimensionale. Nel caso di una fessura obliqua è attivo un effetto di accoppiamento tra tensioni normali e spostamenti tangenziali e tra azioni tangenziali alla fessura e spostamenti normali.

Formulando in modo opportuno il sistema risolutivo (8) si possono analizzare le condizioni di scorrimento: scorrimento senza attrito e con attrito secondo il modello di Coulomb elastico, condizione di 'sticking'.

Considerando come caso generico che vi siano  $n$  porzioni chiuse con  $x_{1k}$  e  $x_{2k}$  il limite superiore ed inferiore del generico tratto ' $k^{\text{esimo}}$ ' della porzione chiusa di fessura deve valere:

a) componenti di COD

$$v(x, a) : \begin{cases} = 0 & \text{per } x_{1k} \leq x \leq x_{2k} \quad k = 1, \dots, n \quad (\text{porzioni chiuse}) \\ \geq 0 & \text{altrove} \end{cases} \quad (9a)$$

$$u(x, a) : \begin{cases} = \text{fissato} & \text{per } v(x, a) = 0 \quad (\text{condizione sticking}) \\ = \text{variabile} & \text{per } v(x, a) = 0 \quad (\text{scorrimento con e senza attrito}) \\ = \text{variabile} & \text{altrove} \end{cases} \quad (9b)$$

b) pressione di contatto:

$$p(x, a) : \begin{cases} \geq 0 & \text{per } v(x, a) = 0 \\ = 0 & \text{altrove} \end{cases} \quad (10a)$$

c) azione tangenziale nelle zone di contatto, in valore assoluto:

$$t(x, a) : \begin{cases} = \mu \cdot p(x, a) & \text{per } v(x, a) = 0 & (\text{scorrimento con o senza attrito}) \\ < \mu \cdot p(x, a) & \text{per } v(x, a) = 0 & (\text{condizione sticking}) \\ = 0 & \text{altrove} \end{cases} \quad (10b)$$

dove  $\mu$  rappresenta il coefficiente di attrito ( $\mu = 0$  per contatto senza attrito)

Per quanto riguarda lo spostamento  $u$  ed il segno dell'azione tangenziale  $t$  è necessario precisare che:

- 1) la condizione sticking si realizza quando la risultante delle azioni di contatto è interna al cono di attrito. In tal caso lo spostamento  $u(x, a)$ , risulta fissato localmente all'ultimo valore assunto prima che la risultante entrasse nel cono d'attrito;
- 2) il segno della azione tangenziale deve essere fissato in modo tale che l'azione d'attrito si opponga alla variazione dello spostamento  $u(x, a)$  al variare delle condizioni di sollecitazione esterna.

Per la soluzione di questo problema deve essere innescata una procedura iterativa che partendo da una estensione di tentativo delle porzioni chiuse di fessura permetta di identificare le effettive zone di contatto della fessura e verifichi la compatibilità delle condizioni di scorrimento. Queste ultime non si considerano nell'ipotesi di scorrimento senza attrito in quanto la componente  $u$  del COD è libera di assumere qualsiasi valore mentre l'azione tangenziale è nulla. Nel caso di scorrimento con attrito le condizioni di compatibilità devono essere poste, al variare delle condizioni di sollecitazione esterna, tenendo conto della storia di spostamento tangenziale, in modo da poter definire chiaramente il verso dell'azione dissipativa d'attrito.

In conseguenza delle ipotesi di scorrimento assunte, per il generico intervallo possono essere noti il COD o in alternativa le corrispondenti componenti di tensione, per cui nel sistema non omogeneo della eqn. 8 le incognite sono rappresentate:

- a) nelle porzioni di fessura aperta dalle componenti  $u$  e  $v$  del COD
- b) nelle porzioni di fessura chiusa dal valore della pressione di contatto ( $v = 0$ ) e, alternativamente, dal valore dello spostamento relativo  $u$  (caso di scorrimento) oppure dal valore della azione tangenziale  $t$  (caso di condizione sticking)

Il processo iterativo termina quando vengono soddisfatte le condizioni poste nelle relazioni (9) e (10).

## 2. GEOMETRIA DEL PROBLEMA

La geometria del problema è riportata in figura 1: un corpo piano semi-infinito, recante una fessura di bordo obliqua, di lunghezza  $a$ , inclinata di un angolo  $\theta$  rispetto alla normale alla superficie. Il corpo è caricato con una forza avente intensità  $P$  (forza per

unità di spessore) applicata ortogonalmente alla superficie ad una distanza  $L$  dalla bocca della fessura. Il parametro  $L$  rappresenta la posizione istantanea della forza nel suo movimento sulla superficie. Il generico punto lungo la fessura è rappresentato nel sistema di riferimento locale centrato sulla bocca della fessura, dalla coordinata locale  $x$ . Le tensioni nominali prodotte da  $P$  in un corpo ideale non fessurato [15], possono essere espresse in funzione dei parametri  $L, x, \theta$  come segue:

$$\sigma_{yy} = \frac{-2P}{\pi} \frac{x \cos(\vartheta)}{(L^2 + x^2 - 2xL \sin(\vartheta))^2} \cdot [L \cos(\vartheta)]^2 \quad (11a)$$

$$\tau_{xy} = \frac{+2P}{\pi} \frac{x \cos(\vartheta)}{(L^2 + x^2 - 2xL \sin(\vartheta))^2} \cdot [x - L \sin(\vartheta)] \cdot [L \cos(\vartheta)] \quad (11b)$$

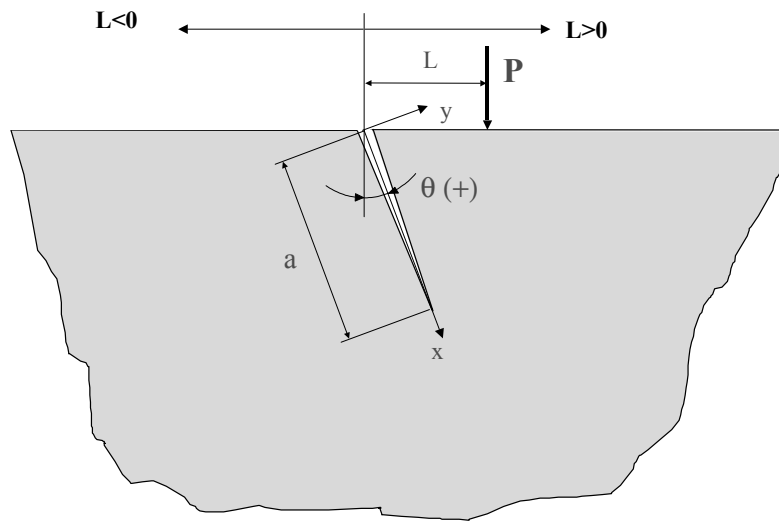


Fig. 1: schema della geometria del problema

Le componenti di tensione nominale sono funzioni analitiche della posizione  $x$  limitate quando  $L \neq 0$ . Particolare attenzione deve essere posta quando la forza si avvicina alla bocca della fessura a causa della singolarità delle funzioni per  $L \rightarrow 0$  e  $x \rightarrow 0$ .

Per la rappresentazione dei risultati sono stati adottati i seguenti fattori di normalizzazione, rispettivamente per FIS, azioni di contatto, componenti di COD:

$$K_o = P \cdot \sqrt{\frac{\pi}{a}} \quad (12)$$

$$S_o = \frac{2P}{\pi a} \quad (13)$$

$$v_o = \frac{a \cdot S_o}{E} \quad (14)$$

L'analisi è stata condotta spostando la sia forza da  $-\infty$  a  $+\infty$  sia da  $+\infty$  a  $-\infty$ .

### 3. RISULTATI E DISCUSSIONE

#### 3.1 Soluzione trascurando le forze di contatto

L'andamento dei valori di  $K_I$  e  $K_{II}$  dovuti alle sole azioni nominali delle equazioni (11), in funzione della posizione della forza rispetto alla bocca è riportato in figura 2, mentre il luogo dei punti  $K_{II}/K_0$  vs  $K_I/K_0$  è riportato in figura 3. Il valore di  $K_I$  ed anche la componente  $v$  del COD risultano negativi per ogni inclinazione della fessura e per tutte le posizioni della forza, prefigurando quindi una condizione di compenetrazione fisicamente non accettabile.

A causa della singolarità nello stato di tensione, quando la forza passa sulla bocca della fessura si ha una discontinuità negli andamenti del FIS, che dipende dall'angolo di inclinazione della fessura. Il passaggio della forza concentrata sulla bocca della fessura è indicato con linea tratteggiata in figura 3.

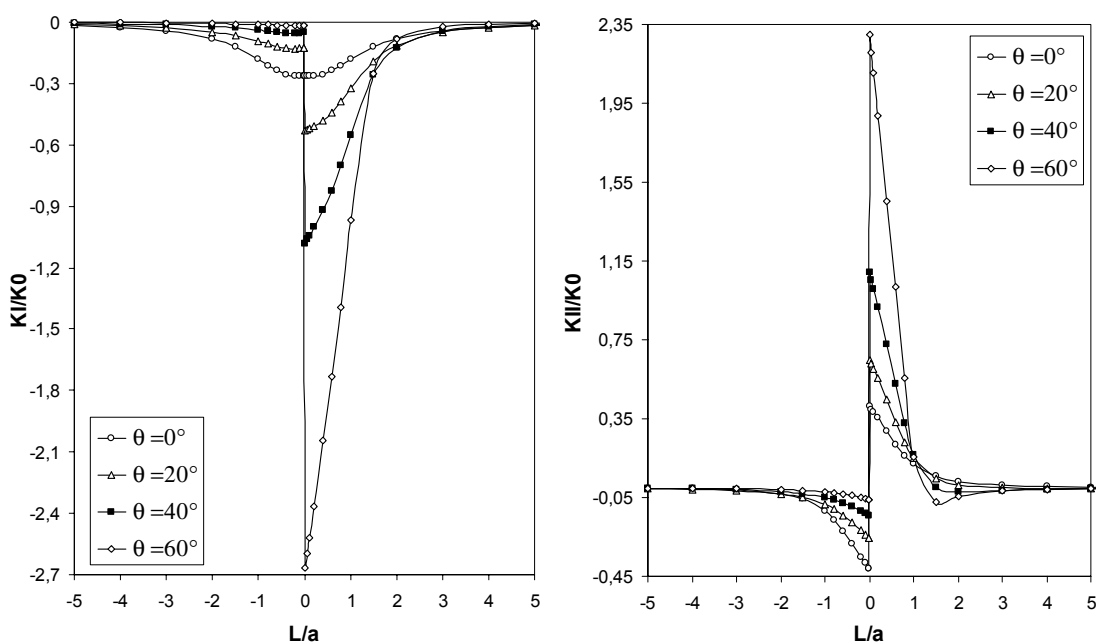


Fig. 2: valori dei FIS dovuti alle sole tensioni nominali espresse dalle eqn. 11 (a,b)

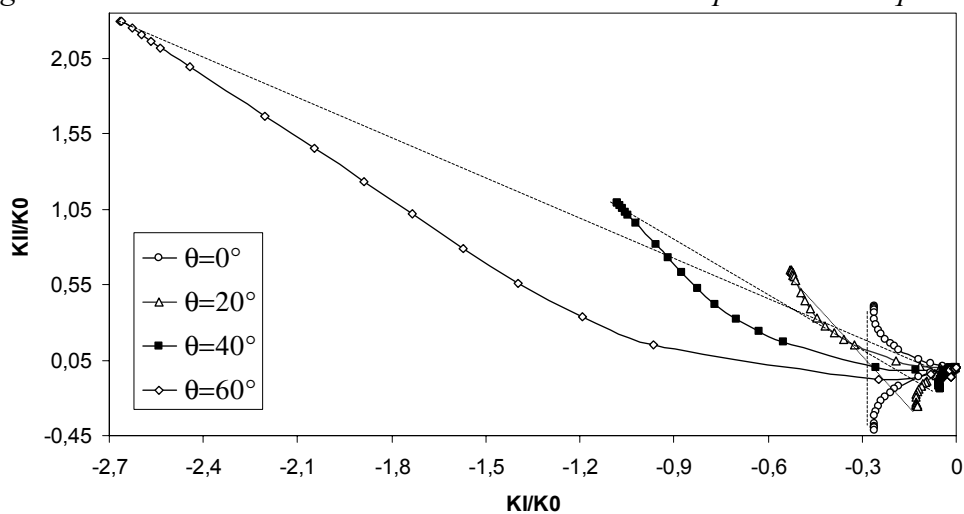


Fig. 3: luogo  $K_{II}/K_0$  vs.  $K_I/K_0$  al variare della posizione della forza

### 3.2 Analisi delle condizioni di contatto

L'analisi del contatto è stata condotta considerando le due condizioni estreme: contatto senza attrito e contatto con attrito statico (condizione sticking) e due condizioni intermedie: contatto con coefficiente di attrito dinamico  $\mu=0.1$  e  $0.3$

#### 3.2.1 Contatto senza attrito

L'andamento dei valori del FIS considerando anche il contributo delle pressioni normali di contatto è riportato in figura 4, mentre in figura 5 è rappresentato il luogo dei valori  $K_I$ - $K_{II}$  per alcune inclinazioni di fessura. Anche in questo caso le linee tratteggiate rappresentano il salto in termini di  $K_I$  e  $K_{II}$  effettivi al passaggio della forza sulla bocca. La pressione di contatto e le condizioni di accoppiamento determinano una storia di FIS completamente diversa rispetto a quella prevista considerando le semplici azioni nominali. La pressione tende ad annullare l'effetto delle tensioni normali nominali che sono sempre di compressione, l'effetto di accoppiamento determina la presenza di un tratto in cui la fessura è soggetta a valori di  $K_I$  positivi. Per la condizione di fessura ortogonale alla superficie, venendo meno questo effetto, la fessura rimane chiusa e  $K_I=0$  (l'effetto delle pressioni di contatto è uguale e contrario a quello delle azioni normali), pertanto essa risulta soggetta solo a modo II di apertura.

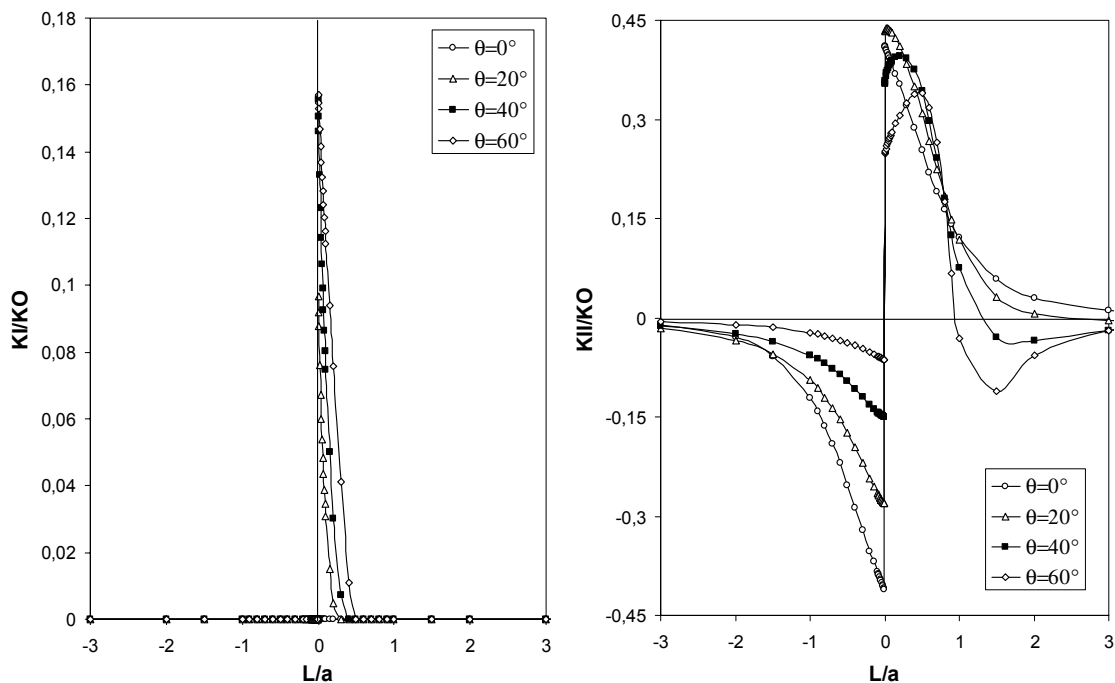


Fig. 4: valori dei FIS effettivi dovuti alle tensioni nominali ed alla pressione di contatto (attrito nullo)



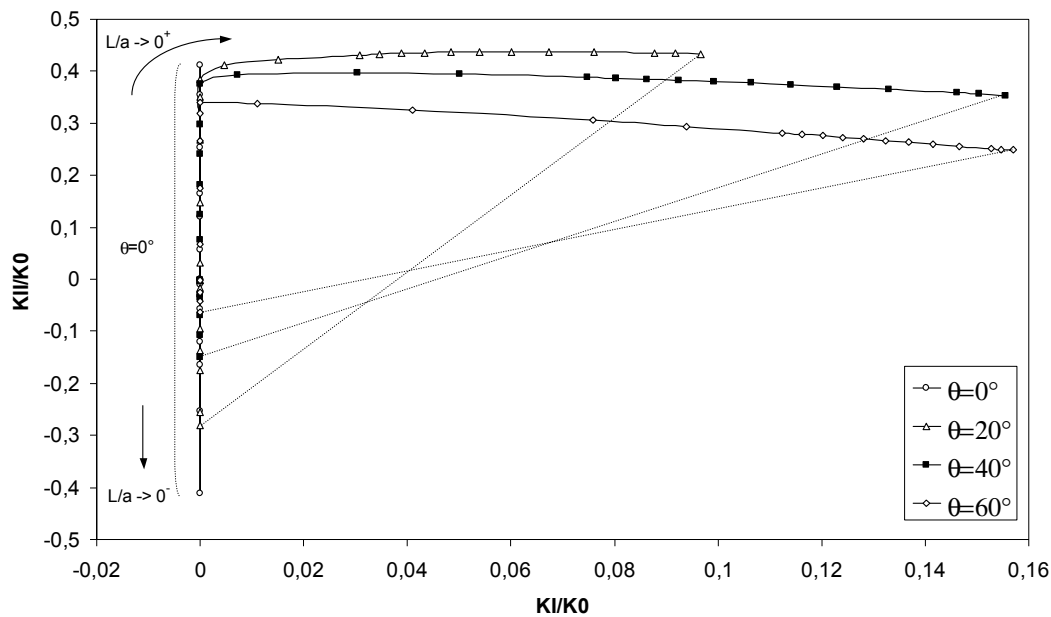


Fig. 5: luogo dei FIS effettivi al variare della posizione della forza con azioni di contatto senza attrito

In generale la fessura risulta parzialmente aperta per qualsiasi posizione della forza, tuttavia solo in un intervallo circoscritto di posizioni del carico si ha apertura all'apice, cui corrispondono valori di  $K_I$  positivi. In figura 6 sono riportate le condizioni tipiche di apertura e chiusura della fessura in funzione della posizione della forza.

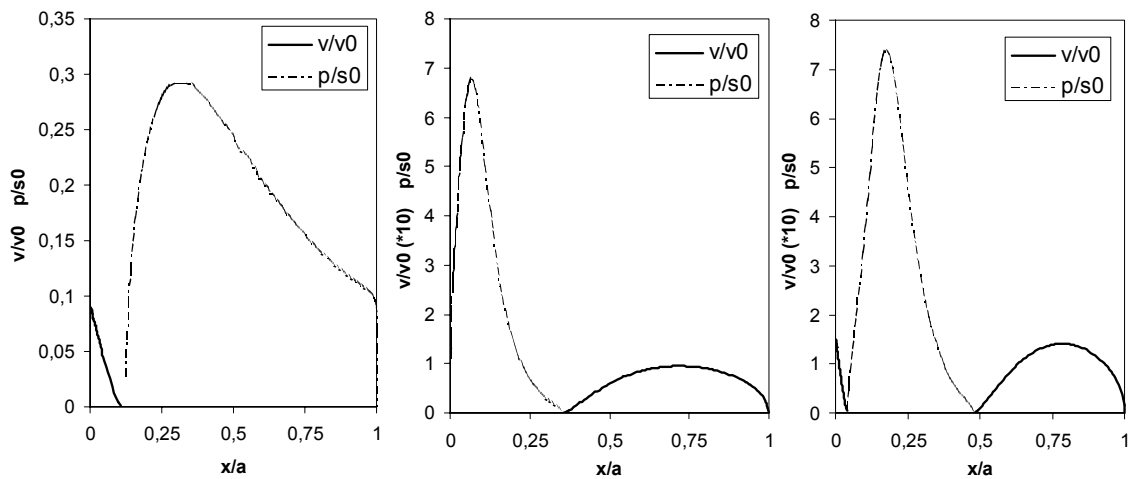


Figura 6: andamenti tipici del COD( $v$ ) e della pressione di contatto a) chiusa all'apice ( $K_I=0$ ) b) chiusa sulla bocca ( $K_I>0$ ) c) chiusa in una porzione intermedia ( $K_I>0$ )

### 3.2.2 Contatto in condizioni sticking

Il caso in cui si possa considerare un coefficiente di attrito sufficientemente elevato da mantenere la fessura in condizioni sticking preclude ogni possibilità di scorrimento relativo tra le superfici a contatto. In queste condizioni la fessura risulta completamente

chiusa per qualsiasi posizione della forza applicata e per qualsiasi inclinazione. Le azioni di contatto sono esattamente opposte alle azioni nominali. A tutti gli effetti è come se si ripristinasse la continuità nel semipiano.

### 3.2.3 Contatto con attrito

Lo studio delle condizioni di contatto con attrito è stato condotto per un valore del coefficiente di attrito  $\mu=0.1$ . In considerazione dell'azione dissipativa dell'attrito che si oppone sempre allo scorrimento relativo tra le superfici della fessura, il verso di moto della forza sulla superficie non può essere trascurato. Pertanto l'analisi è stata condotta considerando i due casi di forza in moto da  $-\infty$  a  $+\infty$  e da  $+\infty$  a  $-\infty$ .

Osservazioni analoghe a quelle riportate nel paragrafo 3.1 e rappresentate nella figura 6 si possono trarre per quel che riguarda l'estensione della porzione chiusa della fessura. Inoltre per effetto dell'azione d'attrito la porzione chiusa della fessura presenta spesso tratti in cui avviene scorrimento e tratti in cui lo scorrimento risulta bloccato.

In figura 7 si riportano gli andamenti dei FIS per diverse inclinazioni considerando il moto della forza sia da  $-\infty$  a  $+\infty$  (+) sia da  $+\infty$  a  $-\infty$  (-). In figura 8 sono invece rappresentati i luoghi  $K_I/K_0-K_{II}/K_0$  relativamente ai due casi riportati di moto relativo della forza applicata.

In base ai diagrammi riportati si può osservare che una potenziale fessura inclinata è soggetta a modo II di apertura per un largo intervallo di posizioni della forza ed in modo misto in un tratto limitato che corrisponde alla posizione della forza in prossimità della bocca della fessura ( $L>0$ ). In questo tratto il massimo valore di  $K_I$  aumenta con dell'angolo di inclinazione. E' da notare (fig. 7b e fig. 8) che  $\Delta K_{II \max}$  espresso come differenza tra il massimo ed il minimo valore di  $K_{II}$  tende invece a diminuire all'aumentare dell'inclinazione.

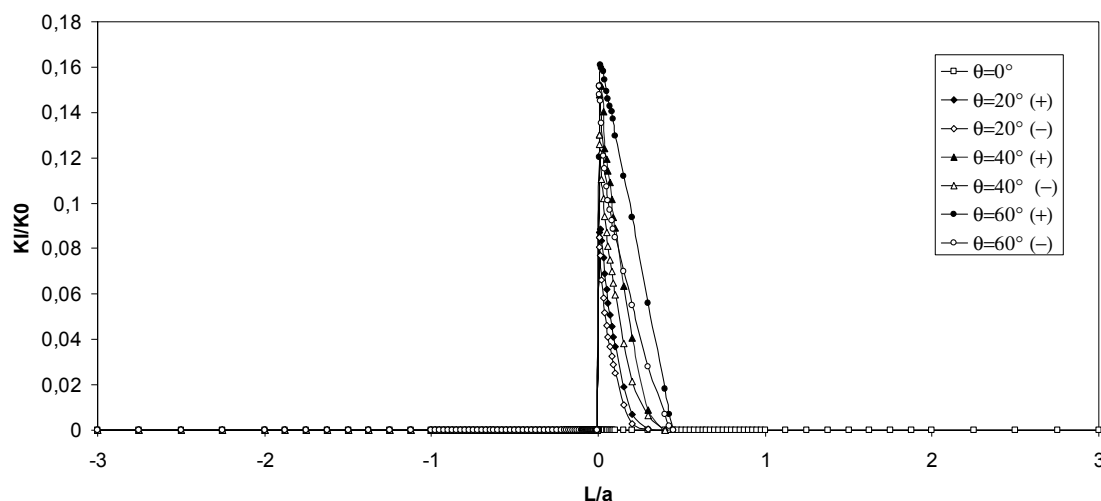


Fig. 7 a): valori dei  $K_I$  effettivi dovuti alle tensioni nominali, alla pressione di contatto e alla azione d'attrito ((+)forza in moto da  $-\infty$  a  $+\infty$  (-)forza in moto da  $+\infty$  a  $-\infty$ )

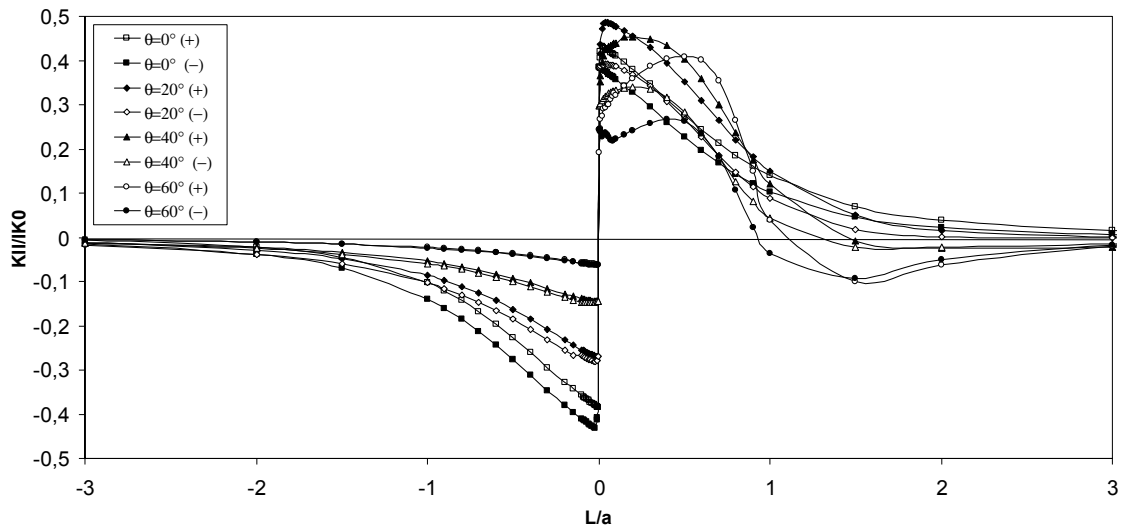


Fig. 7 b): valori dei  $K_{II}$  effettivi dovuti alle tensioni nominali, alla pressione di contatto e alla azione d'attrito ((+)forza in moto da  $-\infty$  a  $+\infty$  (-) forza in moto da  $+\infty$  a  $-\infty$ )

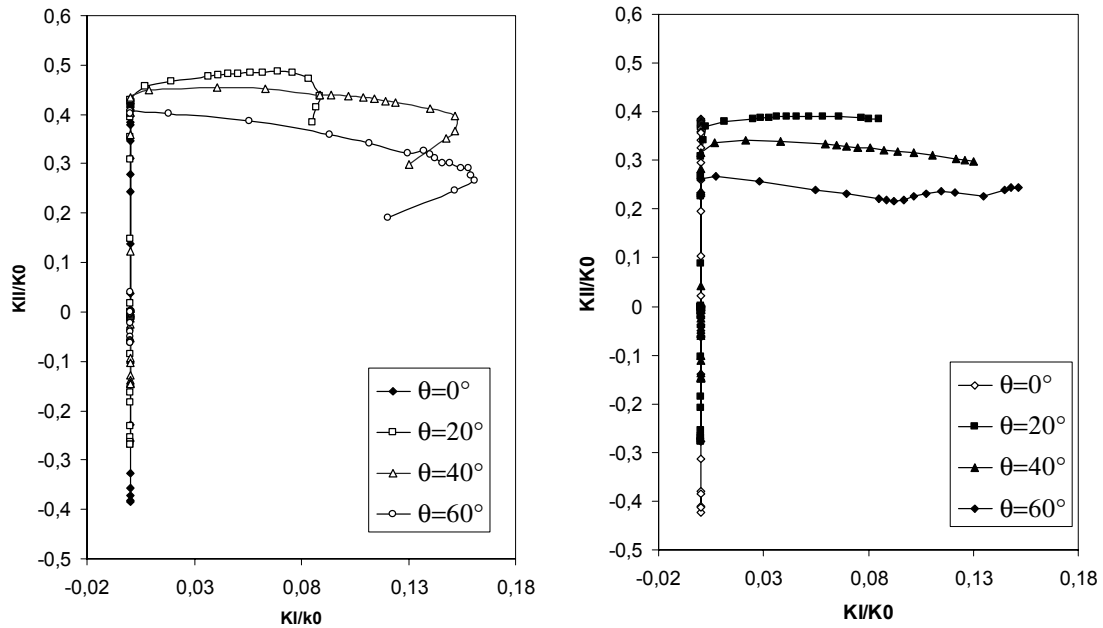


Fig. 8: luogo dei FIS effettivi al variare della posizione della forza rispettivamente per moto da  $-\infty$  a  $+\infty$  e da  $+\infty$  a  $-\infty$

Per una rappresentazione generale che tenga conto del modo misto di apertura, si può far riferimento al tasso di rilascio di energia, tramite il quale si può derivare il valore equivalente effettivo del FIS secondo la relazione seguente [17]:

$$K = \sqrt{K_I^2 + K_{II}^2} \quad (15)$$

Peraltro con questo calcolo viene persa l'informazione sul segno del termine  $K_{II}$ .

In figura 9 è riportato il valore massimo di  $K$  raggiunto durante il passaggio della forza, in funzione dell'inclinazione della fessura. Con questo tipo di approccio, questo valore rappresenta il valore di  $\Delta K$  in un ipotetico ciclo di fatica.

La componente  $K_{II}$  contribuisce in modo predominante al valore di  $K$  per cui le condizioni più gravose, che verosimilmente faranno propagare una fessura a discapito di un'altra diversamente inclinata, sono principalmente dipendenti dal valore di  $K_{II}$ .

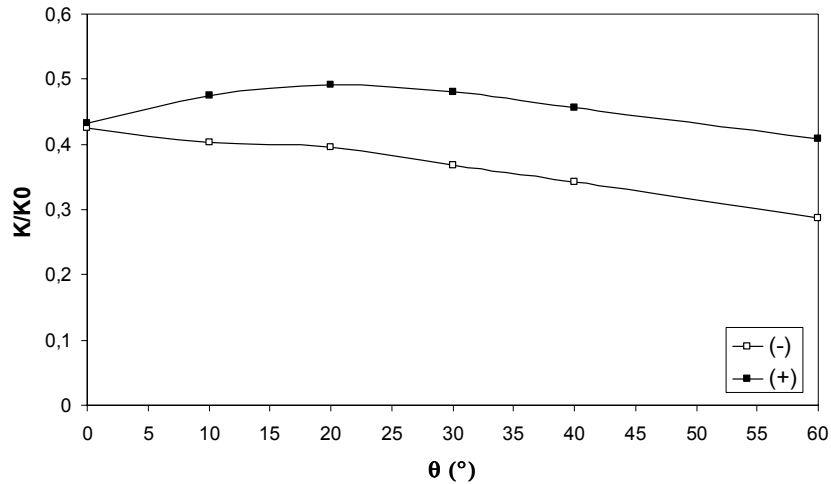


Fig. 9: valori massimi di  $K$  al variare dell'inclinazione della fessura per i due versi di percorrenza della forza

In figura 10 è riportato il confronto tra gli andamenti  $K_I/K_0$  vs.  $K_{II}/K_0$  per un  $\theta=20^\circ$ . Le frecce indicano il verso di percorrenza del luogo in relazione al moto della forza. La discontinuità nel passaggio della forza sulla bocca della fessura è sostanzialmente la stessa nei due casi (linea tratteggiata), la differenziazione si manifesta nella regione ove la fessura risulta aperta all'apice.

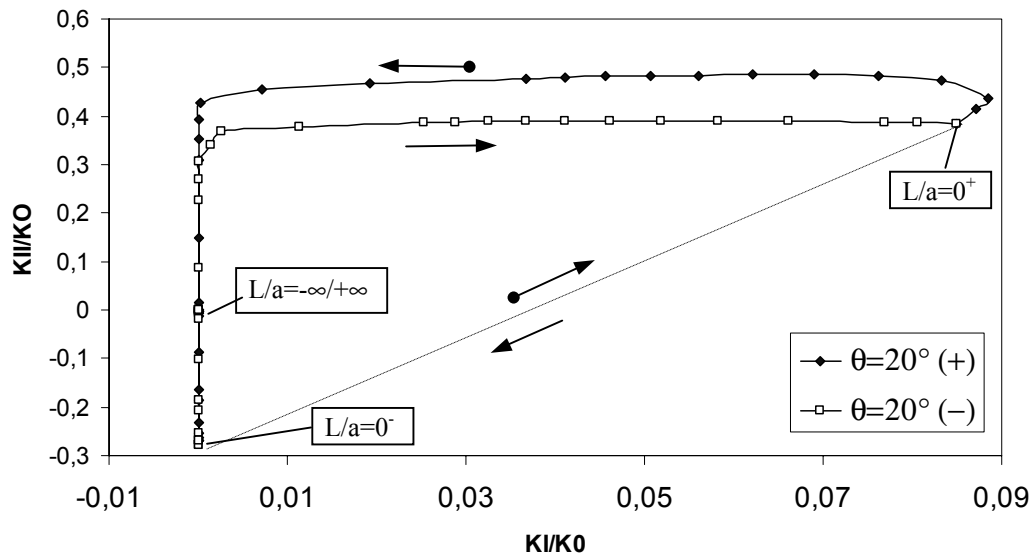


Fig. 10: confronto tra i luoghi dei FIS effettivi al variare della posizione della forza rispettivamente per moto da  $-\infty$  a  $+\infty$  e da  $+\infty$  a  $-\infty$

In figura 11 è riportato un confronto tra i luoghi ottenuti per diversi valori del coefficiente di attrito. Nel caso di coefficiente di attrito nullo il luogo dei FIS è indipendente dal verso di percorrenza della forza rispetto alla fessura, all'aumentare del coefficiente di attrito la differenziazione tra i luoghi generati dai due versi di percorrenza aumenta progressivamente nella zona ove la fessura ha  $K_I$  positivo.

Si può notare come l'analisi dei due casi di forza in moto da  $-\infty$  a  $+\infty$  oppure da  $+\infty$  a  $-\infty$ , permetta di discutere anche il problema di una forza in moto sulla superficie di un semipiano contenente fessure aventi inclinazione rispettivamente  $+\theta$  e  $-\theta$  come riportato in schematicamente in figura 12.

Dalla figura 9 si può osservare che l'azione dovuta alla forza in moto sulla superficie è maggiormente gravosa per il caso rappresentato in figura 12 a). In base a questa considerazione si può affermare che, in presenza di due difetti aventi la stessa inclinazione ma di segno opposto, una forza, che periodicamente passa sulla superficie sempre nella stessa direzione (es. corpi volventi dei cuscinetti che non invertono il moto), determina condizioni di sollecitazione più gravose per i difetti che propagano nella direzione di moto della forza. Questa osservazione potrebbe rendere conto dell'inclinazione predominante delle fessure, rispetto alla direzione del moto dei carichi nei casi di fatica superficiale. Tale inclinazione predominante è stata osservata in [16] ed è stata giustificata facendo intervenire complesse ipotesi relative all'effetto di intrappolamento del lubrificante che sembrerebbe favorito nel caso di fessure con tale orientamento. Tuttavia il risultato del presente lavoro suggerisce che tale tipo di difetti risulterebbe più sollecitato anche a prescindere dall'azione dell'eventuale lubrificante.

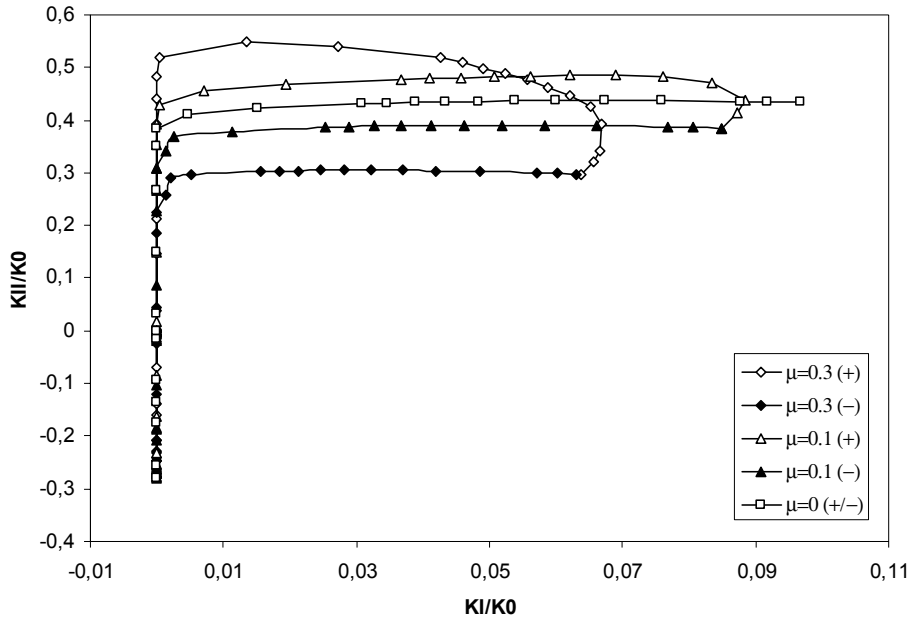


Fig. 11: luoghi dei FIS effettivi, per diversi valori del coefficiente di attrito al variare della posizione della forza, rispettivamente per moto da  $-\infty$  a  $+\infty$  e da  $+\infty$  a  $-\infty$

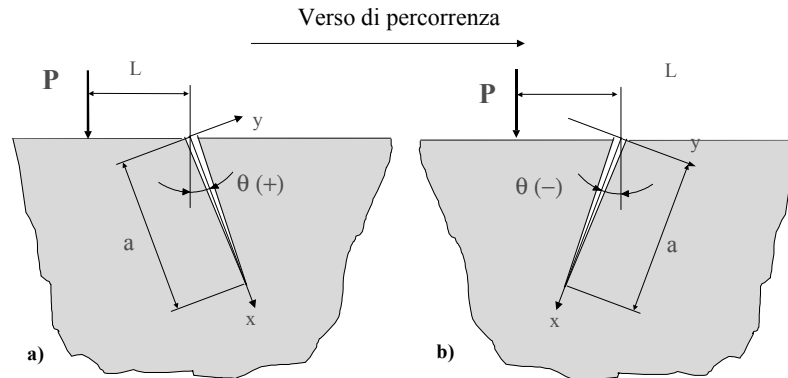


Fig. 12: schema della inclinazione della fessura rispetto alla forza in moto

## Conclusioni

E' stata presentata un'applicazione del metodo delle funzioni peso per la determinazione dei Fattori di intensificazione degli sforzi (FIS) e delle componenti di 'crack opening displacement' (COD) nel caso di una fessura superficiale inclinata. In particolare è stato studiata la condizione di sollecitazione indotta da un forza puntiforme in moto sulla superficie che riproduce le condizioni di vari particolari meccanici soggetti a usura superficiale.

Questo tipo di carico genera nella fessura parziale o totale chiusura in relazione a valori dell'inclinazione, dell'attrito e della posizione della forza rispetto alla bocca del difetto. Le condizioni di apertura e chiusura della fessura sono state ottenute per mezzo di una procedura iterativa che partendo da una condizione di parziale chiusura di primo tentativo converge alla effettiva estensione delle porzioni in contatto e permette di tener conto di diverse condizioni di attrito delle superfici.

Applicando questa procedura è stato possibile definire gli andamenti del FIS del COD e delle azioni di contatto al variare della posizione della forza, per diversi angoli di inclinazione della fessura e in diverse condizioni di scorrimento delle superfici della fessura.

Le soluzioni riportate in termini di luogo di  $K_I$ - $K_{II}$  a cui la fessura è soggetta in relazione al moto della forza sulla superficie sono state discusse in particolare in relazione all'inclinazione della fessura. In particolare, è stato mostrato come fessure inclinate in modo da propagare nella direzione di moto del carico siano più sollecitate a fatica, risultato in accordo con evidenze sperimentali relative a situazioni in cui si riscontra la presenza di fessure oblique.

Il modello per la sua semplicità ed efficienza computazionale è adatto ad essere ampliato per analizzare situazioni più complesse quali: la presenza di una componente della forza parallela alla superficie, l'azione dovuta a stati di tensione residua, l'azione di un contatto non puntiforme (Hertziano o elastoidrodinamico) e l'intrappolamento di fluido durante il passaggio della forza.

## Riferimenti bibliografici

1. Fett T., Muntz D.(1997). *Stress intensity factors and weight functions*, Comp. Mech . Pu.
2. Hasebe Norio, Qian Jun Chen, Yizhou (1996) '*Fundamental solutions for half plane with an oblique edge crack*'. Engineering analysis with boundary elements. **17** , n. 4, 263
3. Beghini M., Bertini L., Fontanari V. (1999a) '*Weight function for an inclined edge crack in a semiplane*', International Journal of fracture, **99**, 281-292.
4. Rooke D.P., Rayaprolu D.B., Aliabadi M.H. (1992) '*Crack-line and edge Green's functions for stress intensity factors of inclined edge cracks*' Fatigue & fracture of engineering materials & structure, **15**, n. 5, 441
5. Dai, D.N. Nowell, D. Hills, D.A. (1993): '*Partial closure and frictional slip of 3-D cracks*' International Journal of fracture SEP 01 **63** n. 1 89
6. Chen Yi-Heng, Hasebe N. (1993): '*Properties of eigenfunction expansion form and relative integral for a crack with completely closed surfaces*' Engineering fracture mechanics **46** n. 6 983
7. Beghini M., Bertini L., Vitale E. (1994) '*Fatigue crack growth in residual stress fields: experimental results and modelling*', Fatigue and fracture of engineering materials and Structures **12**, 1433.
8. Beghini M., Bertini L., Fontanari V. (2001) '*A weight function technique for partially closed inclined edge crack analysis*', International Journal of fracture **112**, 57-68
9. Beghini M., Bertini L. (1995) '*Contact stress surface crack: exact solution and assessment of approximate evaluations*'. In: *Contact mechanics II*, Comp. Mech. Pu., pp. 445-452.
10. Beghini M., Bertini L. (1996) '*Effective stress intensity factor and contact stress for a partially closed Griffith crack in bending*' Engineering fracture mechanics. **54**, n. 5, 667
11. Beghini M., Bertini L., Vitale E. (1997) '*Weight functions applied to fatigue crack growth analysis*', Fatigue and fracture of engineering materials and Structures **20** (8), 1093.
12. Beghini M., Bertini L., Fontanari V. (1998) '*Stress intensity factors for oblique edge crack under travelling load*' Atti di: ECF12- Fracture from Defects, Sheffield UK 14-18 september 1998, Vol II 1023 -1028
13. Fett. T., Mattheck C., Muntz D. (1987) '*On the calculation of crack opening displacement from stress intensity factor*' Engineering fracture mechanics **27**, 697-715
14. Hills D.A., Sackfield A., Uzel A.R. (1984) '*The green's function for a slant crack*' Engineering fracture mechanics. **20**, 245-253
15. Timoshenko S., Goodier J.N.: *Theory of elasticity*, Mc Graw Hill, 1990
16. Stolarsky T.A. (2000) '*Tribology in machine design*' Butterworth-Heinemann, Oxford UK
17. Liu A.F. *Structural life assessment methods* ASM international Materials Park OH (USA)