

IL METODO DELLE WF PER CALCOLARE IL FATTORE DI INTENSIFICAZIONE DEGLI SFORZI DI DIFETTI INTERNI IN PRESENZA DI CARICHI DA CONTATTO

M. Guagliano, L. Vergani

*Dipartimento di Meccanica, Politecnico di Milano
Via La Masa 34, 20133 Milano, Italy*

ABSTRACT

The problem of the SIF determination of internal cracks under contact loading is dealt with. An approach based on the weight function method was developed for the determination of K_I and K_{II} . The effect of the contact and of friction between the crack faces was taken into consideration by using approximate relations. The results were compared with the ones obtained by finite element analyses and the agreement was found satisfactory, both without and with the contact between the crack faces.

As possible application of the approach, the case of contact fatigue crack propagation in a automotive gear was dealt with.

SOMMARIO

Oggetto del lavoro è il problema della determinazione del fattore di intensificazione degli sforzi di cricche interne sotto l'azione di carichi da contatto hertziano. E' proposto un approccio, basato sul metodo delle weight functions, per il calcolo di K_I e K_{II} . L'effetto del contatto tra le facce della cricca è stato considerato con un approccio approssimato: il confronto dei risultati con quelli ottenuti da analisi ad elementi finiti è risultato soddisfacente, sia in assenza che in presenza del contatto tra le facce della cricca. E' infine discussa la possibile applicazione dell'approccio al caso di una ruota dentata di interesse automobilistico.

INTRODUZIONE

Le analisi di contatto hertziano sono divenute, negli ultimi anni, sempre più importanti nella progettazione di molti componenti meccanici, quali ruote dentate e cuscinetti.

Uno dei criteri più importanti nel dimensionamento e nella verifica di questi elementi, infatti, è il danno per fatica da contatto, che consiste nel distacco di materiale dalla superficie a causa dell'avanzamento stabile di una microcricca. Tale danneggiamento è causato dalla ripetizione ciclica degli sforzi dovuti al contatto e può aver origine sia in superficie sia sottopelle, generalmente, in quest'ultimo caso, in corrispondenza di un'inclusione.

Se si focalizza l'attenzione su quest'ultimo tipo di danneggiamento, i riferimenti bibliografici concordano nell'affermare che la velocità di avanzamento della cricca dipende principalmente dalla variazione ciclica del fattore di intensificazione degli sforzi relativo al modo II (scorrimento) di avanzamento. Tuttavia, il calcolo di tale grandezza si presenta complesso. Infatti, a causa della natura del carico applicato, le facce della cricca sono tra loro in contatto e non è disponibile alcuna soluzione analitica capace di considerare il contatto e l'attrito tra le facce della cricca. Kaneta et al [1] hanno proposto un approccio tridimensionale per il calcolo del fattore di intensificazione degli sforzi per cricche sub-superficiali circolari; tuttavia, i dati pubblicati si riferiscono ad un numero di casi limitati.

Più recentemente sono stati sviluppati approcci di calcolo [2, 3], basati sul metodo degli elementi finiti, che permettono la determinazione numerica della velocità e della direzione di propagazione; il loro difetto, tuttavia, è quello di essere onerosi in termini di tempo di calcolo e di modellazione.

Conseguentemente a ciò, di recente, sono stati dedicati sempre maggiori sforzi rivolti alla definizione di approcci di calcolo alternativi, capaci di condurre a risultati accurati con un maggior onere di calcolo e di modellazione. Tra questi, il metodo delle Weight Functions (WF) sta diventando via via più popolare a causa della sua versatilità e del ridotto tempo di calcolo richiesto per la sua applicazione.

Nella presente memoria è descritto un approccio per la determinazione delle WF di una cricca interna relativa ai modi I e II di avanzamento della cricca stessa. La WF è basata sui risultati mostrati in [4], relativi a condizioni di carico simmetriche, ma è applicata anche a condizioni differenti da queste ultime, valutando le condizioni entro le quali l'applicazione risulta numericamente accettabile. È stato considerato, in via approssimata, il contatto e l'attrito tra le facce della cricca. I risultati ottenuti sono stati confrontati con quelli relativi ad un modello a elementi finiti per valutare la loro accuratezza.

Come esempio applicativo della procedura messa a punto, infine, è illustrato il caso della propagazione per fatica da contatto di una ruota dentata trattata termicamente.

IL METODO DELLE WEIGHT FUNCTIONS

Il metodo delle Weight Functions, o funzioni peso, è stato introdotto dal Bueckner [5, 6], il quale mostrò come determinare il fattore di intensificazione degli sforzi integrando lungo la lunghezza, a , di una cricca il prodotto della WF, $m(a,x)$, per l'andamento degli sforzi lungo la cricca nel corpo non criccato:

$$K = \int_0^a m(a,x)\sigma(x)dx \quad (1)$$

Il maggior vantaggio del metodo delle WF è quello che $m(a,x)$ è funzione della geometria del corpo criccato; conseguentemente, nota quest'ultima, il fattore di intensificazione degli sforzi relativo ad un qualunque carico applicato può essere ricavato conoscendo la distribuzione degli sforzi lungo la cricca in assenza della cricca stessa.

Per il calcolo della WF si può dimostrare la validità della seguente formula:

$$m(a,x) = \frac{E'}{K_I^r(a)} \frac{\partial v^r(a,x)}{\partial a} \quad (2)$$

dove: $E'=E$ nel caso di sforzo piano e $E' = \frac{E}{(1-\nu^2)}$ quando si è in stato di deformazione piana; $v^r(x,a)$ e $K_I^r(a)$ sono, rispettivamente, il COD ed il fattore di intensificazione degli sforzi relativo al modo I di un caso di riferimento.

Per la determinazione della WF di una geometria qualunque è, quindi, necessario conoscere queste quantità per almeno un sistema di carichi applicato [7, 8]. In particolare, per quanto riguarda il caso considerato in questa memoria (una cricca interna parallela alla superficie di contatto soggetta a carichi hertziani) è necessario conoscere la soluzione relativa a due casi di riferimento, visto che l'avanzamento di un difetto avviene sia per effetto del modo I di propagazione che a causa di una componente dovuta al modo II.

Il primo sistema di carico adottato, relativo al modo I di apertura, è una pressione uniforme applicata sulle facce della cricca, come illustrato in Figura 1a. Per quanto riguarda la determinazione del fattore di intensificazione degli sforzi relativo al modo II, si fa invece riferimento ad una distribuzione uniforme di sforzi tangenziali τ_0 lungo le facce della cricca, come illustrato in Figura 1b.

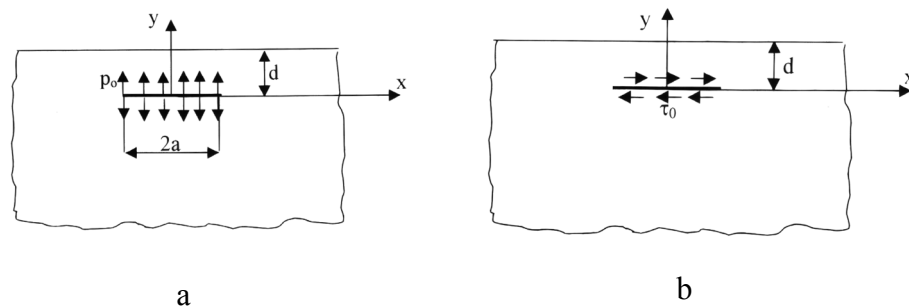


Figura 1 – sistemi di carico di riferimento – a) relativo al modo I; b) relativo al modo II.

Il problema è quindi la determinazione del K_I e del K_{II} in un semipiano elastico sotto l'azione di detti sistemi di carico. Questo caso è stato risolto da Erdogan e Arin [4], tramite un sistema di equazioni integrali di Fredholm. La soluzione citata si riferisce ad una cricca inclinata in un semipiano; nel caso in esame si considera il solo caso di cricca parallela alla superficie libera del semipiano. Le equazioni ottenute dall'applicazione del metodo di Erdogan sono ridotte ad un sistema di equazioni algebriche con un'espansione in serie ottenuta grazie ai polinomi di Chebyshev. Ulteriori dettagli possono essere trovati in [9].

Nelle Figure 2a e 2b gli andamenti dimensionali di K_I^r e di K_{II}^r , ottenuti facendo riferimento ai sistemi di carico di Figura 1. In termini rigorosi, K_{II} non è nullo anche quando si applica p_0 ; tuttavia, i valori numerici sono esigui e sono, quindi, trascurati. Dalla Figura 2 si può notare che se $d/a \rightarrow 0$ allora $K \rightarrow \infty$ e la soluzione perde di significato. Diventa quindi importante definire dei valori di d/a per i quali la soluzione è

ritenuta affidabile; si assume, in base alla sperimentazione numerica eseguita, che per $d/a < 0.4$ i valori di K ottenuti non possano essere ritenuti affidabili.

La determinazione della WF richiede ora che si calcolino le funzioni di spostamento dei lembi della cricca nel caso di carico di riferimento. In [10] sono illustrate le espressioni delle componenti di spostamento u^r e v^r nelle direzioni, rispettivamente x e y . Le espressioni sono:

$$u_{(p_o)}^r(x) = -\frac{1-\nu}{E} p_o x \quad v_{(p_o)}^r(a, x) = \frac{2p_o a}{E} \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)^{\frac{1}{2}} \quad (3)$$

se la cricca è caricata da una pressione p_o uniforme lungo le sue facce, e

$$u_{(\tau_o)}^r(a, x) = \frac{2\tau_o a}{E} \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)^{\frac{1}{2}} \quad v_{(\tau_o)}^r(x) = -\frac{1-\nu}{E} \tau_o x \quad (4)$$

se i carichi applicati sono degli sforzi tangenziali τ_o uniformi lungo lo sviluppo della cricca.

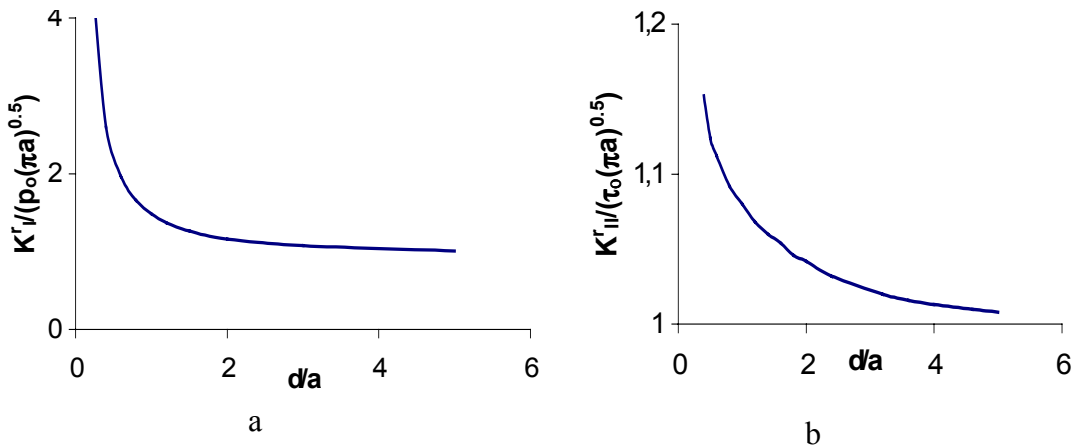


Figura 2 – Andamenti adimensionali del fattore di intensificazione degli sforzi di una cricca interna: a) per effetto di una pressione uniforme p_o , b) per effetto di sforzi tangenziali τ_o uniformi lungo lo sviluppo della cricca.

E' ora possibile determinare la WF per il caso illustrato in Figura 1a:

$$m_1 = \frac{E \left(\frac{\partial}{\partial a} v_{(p_o)}^r(a, x) \right)}{K_I^r(d/a)} \quad (5)$$

dove $v_{(p_o)}^r$ e K_I^r sono definiti, rispettivamente, in (2) ed in Figura 2.

Sostituendo e derivando la (5) si ottiene

$$m_1(a, x) = \frac{2}{K_I^r(d/a) \sqrt{\pi a} \sqrt{\frac{a^2 - x^2}{a^2}}} \quad (6)$$

Per ottenere la WF relativa al modo II si procede in maniera analoga:

$$m_2(a, x) = \frac{E \left(\frac{\partial}{\partial a} u_{(\tau_0)}^r(a, x) \right)}{K_{II}^r(d/a)} \quad (7)$$

dove $u_{(p_0)}^r$ e K_{II}^r sono definiti, rispettivamente, in (5) ed in Figura 2.

Sostituendo e derivando la (7) si ottiene

$$m_2(a, x) = \frac{2}{K_{II}^r(d/a) \sqrt{\pi a} \sqrt{\frac{a^2 - x^2}{a^2}}} \quad (8)$$

CALCOLO DI K_{II} SOTTO L'AZIONE DI CARICHI DA CONTATTO HERTZIANO

Una volta nota la WF, è possibile calcolare il $K_{I,II}$ di una cricca interna per effetto delle sollecitazioni derivanti da condizioni di contatto hertziano attraverso la (1). In particolare, nella presente memoria si considera il solo modo II. La distribuzione degli sforzi nel corpo non criccato è quella determinata da Smith & Liu [11] in un semipiano elastico non fratturato, caricato da una distribuzione di pressione hertziana.

Per determinare i valori di K_{II} durante un intero ciclo di carico, facendo variare la distanza tra il centro della distribuzione delle pressioni e quello della cricca (la distanza e di Figura 3). Tuttavia, nel caso in cui $e \neq 0$ la WF prima determinata non è più, a rigore, applicabile, a causa dell'accoppiamento dei modi I e II che consegue alla violata simmetria del sistema.

Tuttavia, si può ipotizzare che, per estensioni modeste delle cricche e per piccoli valori di e la soluzione trovata possa essere applicata senza commettere errori eccessivi. Inoltre, però, in questo caso sorge il problema di distinguere il fattore di intensificazione degli sforzi ai due apici della frattura. Per superare tale difficoltà i valori di K_{II} ai due apici sono stati calcolati da quello ottenuto utilizzando la WF, pesando la distribuzione degli sforzi lungo la cricca. In altre parole, se K_{II} è il valore che si ottiene integrando la WF, x_G è la distanza del baricentro della distribuzione degli sforzi dall'asse di simmetria della cricca, si definisce un fattore p

$$p = \frac{a + x_G}{2a} \quad (9)$$

Risulta allora nei due apici A e B:

$$K_{IIA} = pK_{II} \quad K_{IIB} = (1 - p)K_{II} \quad (10)$$

I valori ottenuti applicando quest'approccio sono stati verificati per mezzo di un'analisi ad elementi finiti, i cui dettagli sono contenuti in [9]. La lunghezza di cricca considerata è $a=0.007 \text{ mm}$, la distanza $d=0.14 \text{ mm}$ ed il valore della massima pressione $p_o=1400 \text{ MPa}$. E' stato simulato il ciclo di carico completo: il confronto tra i risultati ottenuti con i due metodi è illustrato in Figura 4. La differenza risulta inferiore al 10%. Il confronto è stato anche eseguito per cricche di lunghezza e profondità differente; i risultati, in termini di ΔK_{II} sono riportati in Tabella I.

Dall'esame di questa tabella appare evidente che l'errore aumenta con la dimensione della cricca. Ciò è probabilmente dovuto al venir meno delle ipotesi per le quali la WF è stata determinata.

Inoltre la WF è stata determinata trascurando l'accoppiamento tra i modi di propagazione, che diviene sempre più importante all'aumentare delle dimensioni della cricca.

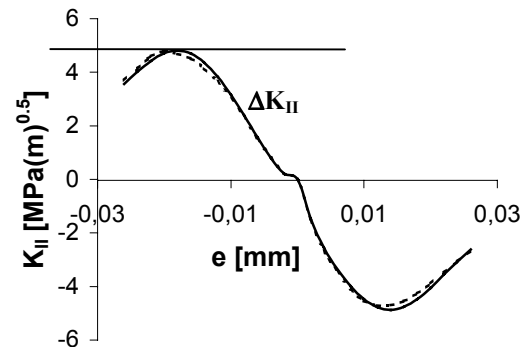
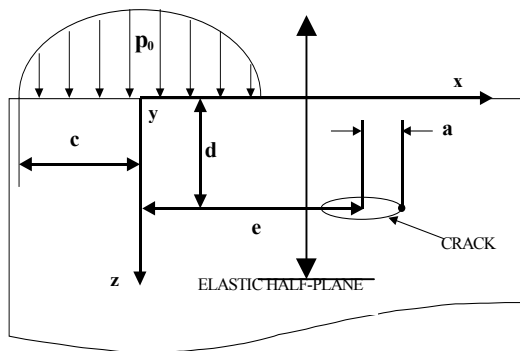


Figura 3 – Rappresentazione schematica di un semipiano criccato internamente in presenza di un carico hertziano.

Figura 4 – Simulazione di un ciclo di rotolamento completo.

Crack length a [mm]	$\Delta K_{II} [MPa\sqrt{m}]$ WF		$\Delta K_{II} [MPa\sqrt{m}]$ FE	
	f=0	f=0.4	f=0	f=0.4
0.03	5.9	3.3	6.0	3.5
0.04	6.5	-	6.5	-
0.05	7.2	3.8	7.2	3.9
0.07	9.7	4.6	9.5	4.5
0.09	9.1	4.9	9.5	4.8
0.12	10.5	-	10.7	-
0.15	11.6	-	11.1	-
0.18	12.5	-	11.9	-
0.22	11.4	-	12.1	-
0.27	5.5	-	13.1	-
0.35	8.1	-	13.8	-

Tabella 1 – Confronto dei valori di ΔK_{II} ottenuti con le WF e con l'analisi FE ($d=0.14 \text{ mm}$, $p_o=1400 \text{ MPa}$, $f=0, 0.4$)

EFFETTO DELL'ATTRITO TRA LE FACCE DELLA CRICCA

In vista di una possibile applicazione ad un caso di interesse pratico dell'approccio definito, è necessario considerare nel calcolo l'effetto del contatto tra le facce della cricca e dei conseguenti sforzi d'attrito. Nel presente lavoro si utilizza un approccio approssimato, mutuato da [12], che considera la stessa W_f prima definita, modificando la sola distribuzione degli sforzi, τ_{eff} , utilizzata nel calcolo di K_{II} . In Tabella 1 è illustrato il confronto tra i risultati ottenuti con il presente approccio e quelli di un calcolo FEM, con un coefficiente d'attrito $f=0.4$: come si può notare il confronto è soddisfacente.

APPLICAZIONE ALLA PROPAGAZIONE PER FATICA DA CONTATTO

Come esempio di applicazione pratica dell'approccio sviluppato, si considera il caso della propagazione di una cricca interna contenuta in un dente di una ruota dentata di impiego veicolistico (modulo $m=3\text{mm}$, massima pressione hertziana $p_o=1400\text{MPa}$, materiale 18CrMo4). Il problema appare oggi di grande interesse, dal momento che numerose ricerche mostrano che la maggior parte della vita degli elementi sollecitati da cicli di contatto hertziano è spesa durante la fase di propagazione di un difetto. [13]. Al riguardo, è possibile trovare diverse leggi di propagazione in letteratura: nel presente lavoro si considera quella proposta da Glodez et al [13].

La dimensione iniziale del difetto, $2a=0.05\text{mm}$, corrisponde alla tipica dimensione del grano cristallino dell'acciaio considerato. La profondità alla quale il difetto è posto è $d=0.14\text{mm}$, che corrisponde alla profondità alla quale vi è il massimo sforzo di taglio in presenza della distribuzione di pressione hertziana. Il valore di ΔK_{II} è calcolato con l'approccio WF, considerando un coefficiente d'attrito $f=0.4$. Sulla base dei risultati ottenuti si è pervenuti alla seguente funzione di interpolazione:

$$\Delta K_{II} = 153a^3 - 123.25a^2 + 33.96a + 2.55 \quad [MPa\sqrt{m}] \quad (11)$$

Le analisi sono state interrotte per $2a=0.7\text{mm}$, a causa della poca affidabilità dei risultati che si ottengono per dimensioni maggiori della cricca.

In Figura 5 è illustrato l'andamento della velocità di propagazione: le brusche discontinuità che si ottengono sono dovute alle repentine decelerazioni in corrispondenza dei bordi di grano. In Figura 6 è invece illustrato l'andamento di a in funzione del numero di cicli di propagazione.

CONCLUSIONI

E' stato presentato un approccio per il calcolo del fattore di intensificazione degli sforzi di cricche interne sotto l'azione di carichi da contatto che utilizza metodo delle WF. L'approccio di calcolo si basa sulla soluzione di Erdogan e permette di tener in considerazione l'attrito che si sviluppa tra le facce della cricca, seppur in forma approssimata. L'approccio presentato è stato utilizzato per calcolare ΔK_{II} relativo ad un ciclo di rotolamento. Sono, inoltre, state messe in luce approssimazioni e limiti di applicabilità e, sulla base del confronto con i risultati relativi a simulazioni ad elementi

finiti, è possibile affermare che l'approccio dà risultati accurati per dimensioni della cricca modeste. Poiché la maggior parte della vita di un componente sollecitato da carichi hertziani viene spesa per la propagazione di cricche di queste dimensioni, l'approccio può servire come utile strumento per stimare la durata dei componenti

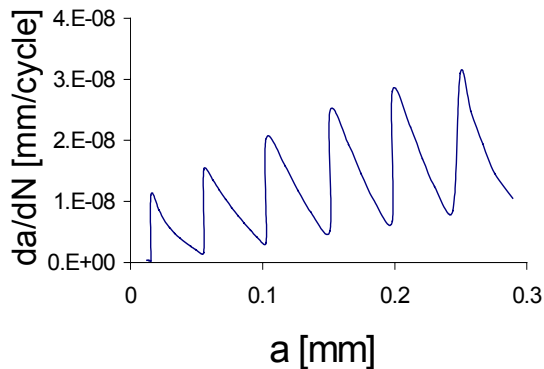


Figura 5 – Andamento della velocità di propagazione.

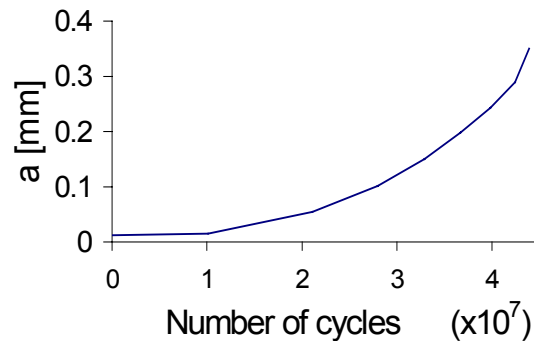


Figura 6 – Andamento di a in funzione del numero di cicli di propagazione.

BIBLIOGRAFIA

1. Kaneta M. et al. (1986) *Trans. of ASME, Journal of Tribology*, **108** pag. 134-139.
2. Bastias P.C. et al. (1989) *Engineering Fracture Mechanics*, **33**, n°1, pag. 143-152.
3. Komvopoulos K., Cho S. S., (1997) *Wear*, **209**, pag. 57-68, 1997.
4. Erdogan F., Arin K. (1975) *Int. Journal of Fracture*, **11**, n°2, pag. 191-204.
5. Bueckner H. F., (1970) *Zeitschrift fur angewandte Mathematik und Mechanik*, **50**, pag. 529-546.
6. Bueckner H. F., (1971) *Zeitschrift fur angewandte Mathematik und Mechanik*, **51**, pag. 97-109.
7. Petroski, H.J., Achenbach, J.D. (1978) *Engineering Fracture Mechanics*, **10**, 257-266.
8. Beghini, M. et al. (1991) *Int. J. for Numerical Methods in Eng.*, **32**, pp.595-607.
9. Guagliano, M., Vergani, L. (2001) Rapporto Interno CDR N. 47-2000, Dipartimento di Meccanica, Politecnico di Milano.
10. Chow C.L., Lau K.J. (1976) *Int. J. of Fracture*, **12**, N°5, p.669-684
11. Smith J.O., Liu C. K., (1953) *ASME J. of Applied Mechanics*, **20**, pag.157-166.
12. Fletcher D. I., Beynon J. H., (1999) *Proc. Instn. Mech. Engrs.*, **213**, pag. 481-486.
13. Glodez S. et al. (1997) *Fat. Fract. Engng. Mater. Struct.*, **20**, n°1, pag. 71-83.