

# INFLUENZA DELLA VISCOSITA' SULLA CRESCITA DELLA FESSURA NEL CALCESTRUZZO

F. Barpi, S. Valente

*Dipartimento di Ingegneria Strutturale e Geotecnica,  
Politecnico di Torino, Torino  
e-mail: barpi@polito.it, valente@polito.it*

## **Sommario**

Si illustrano i risultati ottenuti con un modello che combina un approccio viscolastico (per la dipendenza dal tempo) con uno micromeccanico (per l'incrudimento negativo a trazione) basato sul concetto di molla efficace. Lo scopo è studiare il comportamento di provini di calcestruzzo nel caso della prova di flessione su tre punti. Il modello usato è quello della fessura coesiva: il materiale è considerato elastico lineare mentre lo schema proposto è applicato alla fessura fittizia. Nel caso di carico mantenuto costante, si verifica una crescita delle microfessure che provoca una riduzione graduale delle rigidità che governano la risposta incrementale ad azioni di tipo istantaneo. Assumendo che i tempi di ritardo e di rilassamento costanti, tale riduzione si propaga agli elementi viscosi della zona di processo. I risultati ottenuti con la procedura brevemente esposta sono confrontati con quelli sperimentali in termini di curve carico-spostamento mostrando un buon accordo.

## **Abstract**

*A methodology that combines a rheological model for viscoelastic behaviour with a micromechanical model for tension softening is presented. The concept of the effective spring is discussed. The equations of equilibrium, compatibility and damage growth are numerically integrated to study the response of a three point bending test concrete specimen. The fictitious crack model is used and the two mentioned models are applied in the process zone. In particular, when the time elapses under constant load, the microcracks grow causing a gradual reduction in the stiffness governing the incremental response. This reduction propagates to the dashpots governing the time-dependent response of the process zone. A comparison between numerical and experimental results in terms of load vs. displacement curves is finally presented.*

## 1. Introduzione

Alcuni materiali come il calcestruzzo o i compositi cementizi fibro-rinforzati mostrano due caratteristiche importanti: la riduzione di capacità portante con la deformazione (incrudimento negativo o *strain-softening*) e la dipendenza dal tempo.

L'incrudimento negativo porta alla localizzazione della deformazione in una stretta banda, chiamata zona di processo, la cui lunghezza è spesso paragonabile alla dimensione caratteristica della struttura. In questa zona avvengono alcuni complessi fenomeni come la crescita delle microfessure, la loro brusca deviazione quando incontrano un inerte, la loro interazione mutua, ecc. Una teoria sul comportamento di questi materiali deve necessariamente includere l'incrudimento negativo che avviene su un prolungamento fittizio di una fessura libera da tensioni.

Se il materiale danneggiato mostra anche una risposta dipendente dal tempo, si può verificare la propagazione della fessura sotto carico costante, arrivando così al collasso per valori pari anche al 76% del carico massimo di breve durata [1, 2].

In questo lavoro l'attenzione è rivolta allo studio della propagazione molto lenta della fessura, quale quella che avviene nelle dighe a gravità in calcestruzzo, usando un modello che combina un approccio micromeccanico al problema dell'incrudimento negativo con un modello reologico viscoelastico. I due fenomeni sono strettamente correlati tra loro attraverso il concetto di *rigidezza efficace* [3, 4].

## 2. Considerazioni Micromeccaniche Indipendenti dal Tempo

Il comportamento della zona di processo fittizia (o ZPF) è caratterizzato dalla relazione tra la tensione di richiusura  $\sigma$  e la discontinuità di spostamento  $w$ . La ZPF può essere efficacemente modellata come una sequenza di microfessure piane alternate a materiale integro contenente inerti e difetti come ad esempio pori [3, 5]. Tale modello dipende da alcuni parametri complessivi del calcestruzzo (modulo di Young  $E_c$ , rapporto di Poisson  $\nu$ , resistenza ultima a trazione  $f'_t$ , percentuale in volume degli inerti che interagiscono con le microfessure  $V_f$ , tenacità della matrice e incremento di tenacità dovuto alla maggiore resistenza degli inerti che ostacola la crescita delle microfessure. I suddetti parametri determinano la costante  $\alpha$  nell'equazione (1):

$$\frac{w}{w_c} = \alpha \frac{1 - \left(\frac{\sigma}{f'_t}\right)^3}{\frac{\sigma}{f'_t}} \quad (1)$$

in cui  $w_c$  indica il valore della discontinuità di spostamento al di là del quale non si ha trasmissione di tensione. I parametri menzionati fino a questo punto sono indipendenti dal tempo, ad eccezione di  $V_f$  che, come illustrato nel seguito, può crescere (di conseguenza  $\alpha$  può variare nel tempo). L'energia di frattura  $G_f$  può essere determinata attraverso prove di breve durata (alcuni minuti), che in seguito verranno indicate come prove statiche. La (1) comporta una relazione biunivoca tra  $G_f$  ed  $\alpha$  che permette di determinare il valore di quest'ultimo parametro (fig. 1).

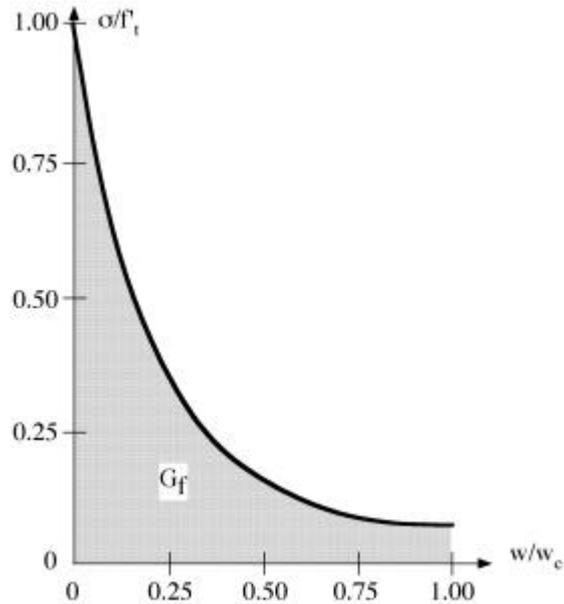


Fig. 1 - Legge di incrudimento negativo per  $a = 0.0288$  [3].

Seguendo il concetto di rigidità efficace si può pensare la ZPF come uno strato omogeneo di molle che collegano i due lembi della discontinuità di spostamento. La risposta incrementale del sistema risulta quindi essere uno scarico elastico verso l'origine del riferimento nel caso  $dw < 0$  (fig. 3a) ed uno spostamento tangente alla curva di fig. 1 nel caso  $dw > 0$  (fig. 3b).

### 3. Considerazioni Micromeccaniche Dipendenti dal Tempo

Per introdurre i concetti che regolano il comportamento del materiale nel tempo si fa riferimento al modello reologico standard di Poynting-Thompson (fig. 2). Indicando con  $w_1$  lo spostamento relativo alla molla di rigidità  $K_1$ , con  $w_2$  quello relativo alla molla di rigidità  $K_2$ , con  $w$  la loro somma e con  $\lambda$  la costante dello smorzatore, si ottiene:

$$\sigma = \lambda \frac{dw_2}{dt} = K_1 w_1 = K_1 (w - w_2) \quad (2)$$

Sottoponendo l'elemento di fig. 2 ad una tensione costante  $\sigma_0$  si ricava la *funzione di viscosità*

$$w(t) = \sigma_0 \left[ \frac{1}{K_1} + \frac{1}{K_2} \left( 1 - e^{-\frac{t}{\vartheta}} \right) \right] \quad (3)$$

dove  $\vartheta$  prende il nome di *tempo di ritardo*. Mantenendo invece costante nel tempo lo spostamento  $w_0$  si ottiene la *funzione di rilassamento*:

$$\sigma(t) = w_0 \left[ K_1 e^{-\frac{t}{\tau}} + \frac{K_1 K_2}{K_1 + K_2} \left( 1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right) \right] \quad (4)$$

dove T prende il nome di *tempo di rilassamento*. Tra i parametri ora introdotti sussistono le seguenti relazioni:

$$\lambda = K_2 \vartheta, \quad K_1 + K_2 = \frac{\lambda}{T} \quad \text{o} \quad K_1 = K_2 \left( \frac{\vartheta}{T} - 1 \right) \quad (5,a,b,c)$$

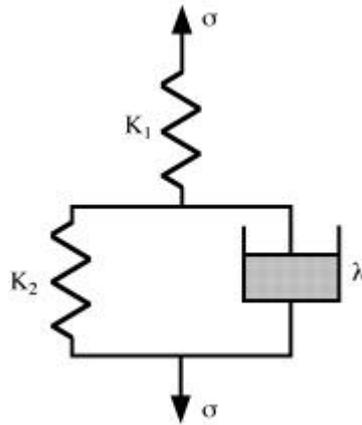


Fig. 2 - Modello reologico standard o di Poynting-Thompson.

Sino ad ora  $K_1$ ,  $K_2$  e  $\lambda$  sono stati assunti costanti nel tempo. Ora si immagini che la coppia ( $w_0$ ,  $\sigma_0$ ) si trovi sulla curva di fig. 1: mantenendo costante  $\sigma_0$  si verifica un aumento del danno contemporaneo alla crescita di  $w$ . Mantenendo costante la teoria microstrutturale si può dire che i parametri ad essa relativi sono cambiati portando ad una crescita del coefficiente  $\alpha$  nella (1). Di conseguenza la curva di fig. 1, pur mantenendo costante il passaggio per il punto (0, 1) si deforma con aumento di  $w$  (per  $\sigma = \text{cost}$ ). Da questa deformazione risulta una riduzione di  $K_1$ , conseguente al concetto di rigidità efficace, indicato qualitativamente in fig. 3a. Il nuovo valore di  $K_1$  risulta:

$$K_1 = \left| \frac{dw}{d\sigma} \right| \quad \text{per} \quad dt \rightarrow 0 \quad (6)$$

La funzione indicata nella (3) presenta la concavità rivolta verso il basso oltre ad un asintoto orizzontale corrispondente ad uno spostamento a tempo infinito pari a  $2w_0$ . Sostituendo in essa il nuovo valore di  $K_1$  (da  $t = 0$ ), si ottiene l'effetto di capovolgerne la concavità, ottenendo velocità di  $w$  crescenti nel tempo. Utilizzando la fig. 1, ed assumendo  $\vartheta = 300$  ore,  $T = 150$  ore e  $dt = 3$  ore, si ottiene  $K_1 = K_2$ . Questi valori generano [3] le curve di viscosità con danneggiamento indicate in fig. 3c.

Il valore della discontinuità di spostamento  $w_c$ , oltre al quale non si ha trasmissione di sforzi, è assunto costante nel tempo.

Analogamente si può operare sulle funzioni di rilassamento. Mantenendo costante  $w_0$  si verifica una riduzione di  $\sigma$  che, attraverso il concetto di rigidità efficace, indicato qualitativamente in fig. 3b, comporta un riduzione di  $K_1$ . Per i valori di  $\alpha$ ,  $\vartheta$ ,  $T$  e  $dt$  indicati in precedenza si ottengono le curve di rilassamento con danneggiamento indicate in fig. 3d. Esse presentano doppia concavità e tensione nulla a tempo infinito [3].

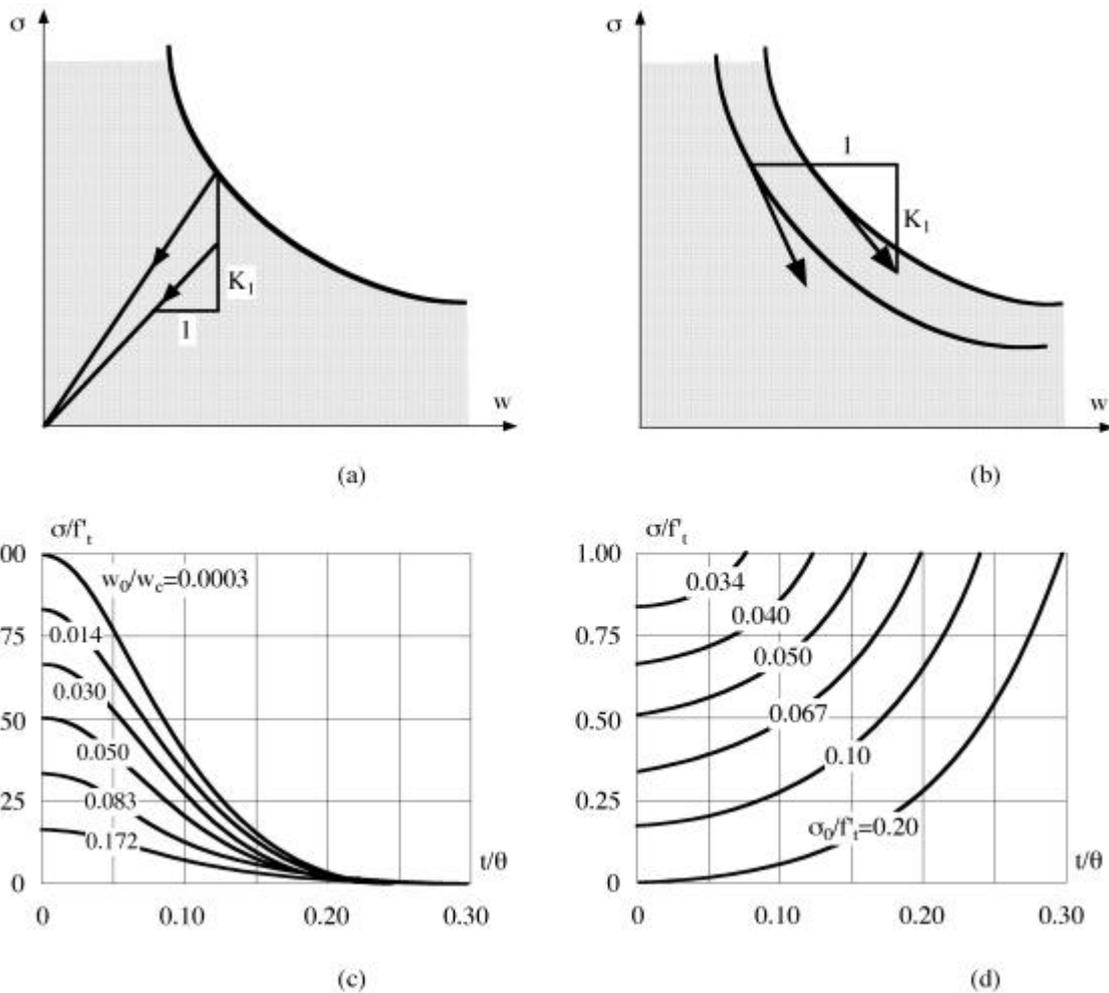


Fig. 3 - (a) degrado di  $K_I$  per  $w = \text{cost.}$ ; (b) degrado di  $K_I$  per  $S = \text{cost.}$ ; (c) curve di rilassamento tensionale per  $w = \text{cost.}$ ; (d) curve di spostamento viscoso per  $S = \text{cost.}$

#### 4. La Prova di Flessione su Tre Punti

Per studiare i problemi posti dalla integrazione nel tempo delle equazioni relative al modello micromeccanico illustrato in precedenza si fa riferimento alla prova di flessione su tre punti in cui la traiettoria della fessura è nota a priori e coincide con l'asse di simmetria.

Le simulazioni numeriche vengono eseguite secondo il modello della fessura fittizia o coesiva imponendo ad ogni passo l'equilibrio e la congruenza degli spostamenti (come illustrato in [6]):

$$(\mathbf{K} + \mathbf{C}) d\mathbf{w} = d\mathbf{p} \quad (7)$$

La matrice  $\mathbf{K}$  viene assemblata a partire da contributi relativi agli elementi al di fuori della ZPF. Poiché tutti i fenomeni non lineari e dipendenti dal tempo sono ipotizzati avvenire solamente nella ZPF,  $\mathbf{K}$  è costante e definita-positiva. Con il crescere della fessura fittizia aumenta il numero delle incognite  $d\mathbf{w}$ . La matrice  $\mathbf{C}$  è invece una matrice diagonale, assemblata a partire dalle rigidità negative tangenti calcolate sulla curva di fig. 1. Poiché la matrice  $\mathbf{C}$  cambia nel tempo, i  $d\mathbf{w}$  vengono limitati in modo che, in fase di controllo, lo stato tensionale, normalizzato come in fig. 1, non si discosti più di 1/1000 dalla curva di incrudimento negativo. I  $d\mathbf{w}$  sono anche limitati dalla condizione

che la tensione, nell'estremo della fessura fittizia, non superi la resistenza a trazione  $f'_t$ . Quando questa condizione diventa limitante, si verifica l'avanzamento della fessura fittizia.

### 5. Procedura di Integrazione nel Tempo sotto Carico Costante

Nel seguito verrà indicato con  $d\sigma_i$  il rilassamento delle tensioni a spostamento costante, con  $dw_i$  l'incremento di spostamenti a tensione costante (calcolato come indicato in precedenza per un intervallo di tempo  $dt$ ), con  $d\sigma$  la riduzione reale delle tensioni e con  $dw$  l'incremento reale della discontinuità di spostamento. Sia  $d\sigma$  che  $dw$  sono rispettosi della congruenza e dell'equilibrio con il continuo circostante, ed, attraverso di esso, con le altre coppie di nodi che si affacciano sulla ZPF. Da quanto visto in precedenza, risulta che, all'inizio della fase a carico costante ( $t = 0$ ), tutti gli stati tensionali corrispondenti alle coppie di nodi che si affacciano sulla ZPF si trovano sulla curva di incrudimento negativo ed il più piccolo autovalore di  $\mathbf{K} + \mathbf{C}$  è positivo. I fenomeni dipendenti dal tempo devono quindi portare lo stato tensionale ad evolvere lungo un percorso che presenti una pendenza maggiore (in valore assoluto) rispetto a quella della curva di incrudimento negativo. Per tutti i punti della ZPF risulta quindi:

$$0 > d\sigma = d\sigma_i \quad \text{e} \quad 0 < dw < dw_i \quad (8a, b)$$

Ad ogni punto del segmento AB in fig. 4a corrisponde un possibile incremento  $(d\sigma, dw)$ . In un secondo tempo, nel punto più lontano dall'estremo della fessura fittizia, si raggiunge la condizione  $dw = dw_i$  ed è quindi necessario ridurre (in modulo) il corrispondente  $d\sigma$  (negativo) ottenendo:

$$0 > d\sigma > d\sigma_i \quad \text{e} \quad 0 < dw = dw_i \quad (9a, b)$$

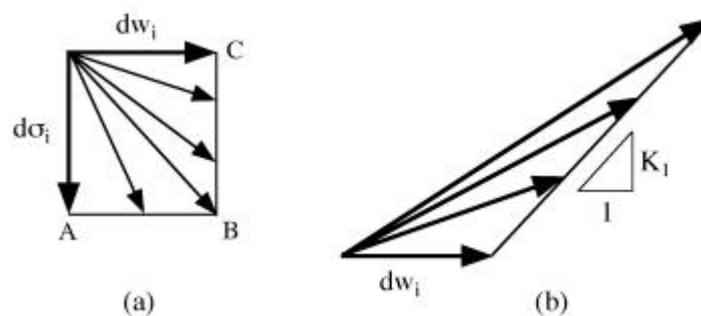


Fig. 4 - Incrementi  $d\sigma$  e  $dw$ . (a) la tensione contribuisce al vettore dei termini noti. (b) la velocità di  $w$  è maggiore di quanto consentito dallo schema micromeccanico locale.

Ad ogni punto del segmento BC in fig. 4a corrisponde un incremento  $(d\sigma, dw)$  che va ad integrare l'insieme dei possibili incrementi. In assenza di vincoli mutui tra i diversi punti della ZPF, sarebbe possibile tracciare le curve  $\sigma = \sigma(t)$  e  $w = w(t)$ , scegliendo, fra gli infiniti incrementi possibili indicati in fig. 4a, l'unico parallelo alla tangente alla curva di incrudimento negativo nel punto in esame [3].

A parte un breve periodo iniziale, nei casi analizzati si è sempre verificata la impossibilità di trovare una soluzione all'interno dell'insieme indicato in fig. 4a. Ad esso viene quindi affiancato l'insieme indicato in fig. 4b, relativo al caso  $dw > dw_i$ . Nel caso di fig. 4b l'incremento tensionale può

quindi essere positivo. Estendendo in questo modo l'insieme dei possibili  $d\sigma$  e  $dw$ , è stato possibile trovare una soluzione congruente ed equilibrata per tutti i passi delle integrazioni numeriche. La condizione di collasso nella simulazione numerica è costituita dalla impossibilità di sostenere il carico costante per insufficienza della porzione non danneggiata (*ligament*). Maggiori dettagli sulla procedura descritta si trovano in [7].

## 6. Confronto con i Risultati Sperimentali

I risultati delle simulazioni numeriche sono stati confrontati con quelli di prove sperimentali di flessione su tre punti, illustrate in [9], ed eseguite secondo le raccomandazioni RILEM. I provini hanno sezione 10x10 cm e una lunghezza pari a 80 cm. L'intaglio iniziale ha una profondità di 5 cm. In accordo con [8], le proprietà meccaniche sono state assunte come segue:

$E_c$	$f'_t$	$G_f$	$\nu$
36 GPa	2.8 MPa	82 N/m	0.10

Tabella 1: Proprietà del materiale.

Si è ritenuto che la curva di incrudimento negativo in grado di approssimare meglio la bilatera assunta in [8] si ottenesse con  $w_c = 0.22$  mm e  $\alpha = 0.005$  (valore iniziale). I parametri definiti fino a questo punto sono sufficienti per la simulazione numerica della prova statica. In fig. 5 è riportato il confronto tra valori sperimentali e numerici relativi al diagramma del carico in funzione dell'abbassamento del suo punto di applicazione. I due diagrammi sono in buon accordo. I tratti indicati a carico costante sono dovuti agli effetti viscosi.

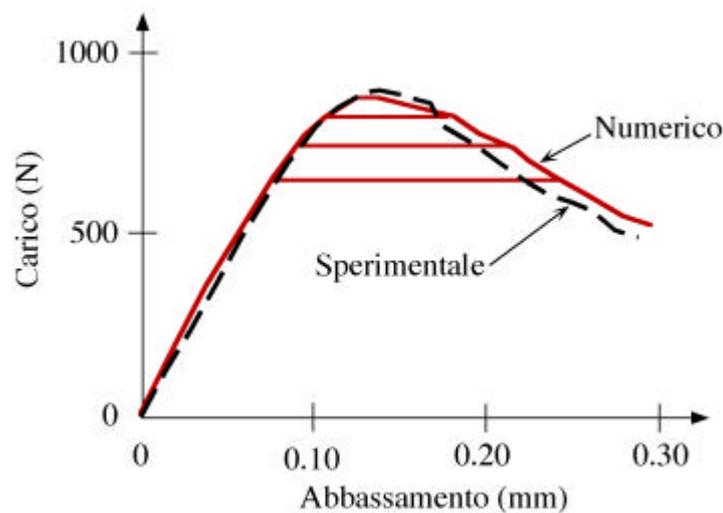


Fig. 5 - Curva carico-abbassamento per la prova di flessione su tre punti.

I tempi a collasso rilevati sperimentalmente variano da 30 s (per  $P/P_{\max} = 0.92$ ) a 3000 s (per  $P/P_{\max} = 0.76$ ). Poiché sono coinvolti tre ordini di grandezza temporali, è stato necessario generalizzare il modello reologico aggiungendo due ulteriori unità viscoelastiche in serie alla unica unità indicata per semplicità in fig. 2. I rapporti tra  $K_1:K_2:K_3:K_4$  sono stati assunti pari ad 1:30:30:30, dove

$K_1$  deriva dal concetto di rigidità efficace menzionato in precedenza . I relativi tempi di ritardo sono stati assunti pari a 24, 240 e 2400 s.

Per maggiori dettagli sui risultati, numerici e sperimentali, relativi alla vita a fatica, si rimanda a [7]. In particolare, il modello descritto ha permesso migliorare la descrizione della pendenza del diagramma livello di carico-vita a fatica.

## 7. Conclusioni

Per semplificare il processo di identificazione dei parametri del materiale si è assunta una legge lineare tra le velocità di rilassamento (o di spostamento viscoso) ed il livello di carico. Uno dei modelli micromeccanici proposti a tale scopo è quello formulato in [3, 4]. Nel presente lavoro è stata descritta una modalità di integrazione numerica delle equazioni che discendono da tale modello. E' stato così possibile migliorare l'interpretazione delle prove sperimentali descritte in [8] sia in termini di curve carico-spostamento che in termini di vita a collasso.

## Bibliografia

- [1] Zhou F., Hillerborg A., "Time-dependent fracture of concrete: Testing and modelling", in: Bazant Z.P. (Ed.), *Fracture Mechanics of Concrete Structures*, Elsevier (Londra), 906-911, **1992**.
- [2] Zhang C., Karihaloo B.L., "Stability of a crack in a viscoelastic tension softening material", in: Bazant Z.P. (Ed.), *Fracture Mechanics of Concrete Structures*, Elsevier (Londra), 155-162, **1992**.
- [3] Santhikumar S., Karihaloo B.L., "Time-dependent tension softening", *Mechanics of cohesive-frictional materials*, **1**, 295-304, **1996**.
- [4] Santhikumar S., Karihaloo B.L., "Time-dependent behaviour of cracked and ageing concrete", in: de Borst R., Bicanic N., Mang H., Meschke G. (Eds.), *Computational Modelling of Concrete Structures*, Balkema (Rotterdam), 455-465, **1998**.
- [5] Li V.C., Huang J., "Relation of concrete fracture toughness to its internal structures", in: Rossmannith H.P. (Ed.), *Fracture and Damage of Concrete and Rock*, Pergamon (Oxford), 39-46, **1990**.
- [6] Barpi F., Valente S., "Crack propagation under constant load: Constitutive laws for the process zone", in: de Borst R., Bicanic N., Mang H., Meschke G. (Eds.), *Computational Modelling of Concrete Structures*, Balkema (Rotterdam), 285-290, **1998**.
- [7] Barpi F., Valente S., "Interazione tra il comportamento viscoso del calcestruzzo e la crescita della fessura", *Atti del XIV Congresso dell'Associazione Italiana di Meccanica Teorica e Applicata*, Como, **1999**.
- [8] Zhou F., "Time-dependent crack growth and fracture in concrete", *Tesi di Dottorato*, Report TVBM-1011, Lund (Svezia), **1992**.