

# STUDIO DELLA PROPAGAZIONE DI CRICCHE DI FATICA DI FORMA QUALSIASI IN CAMPO ELASTOPLASTICO

*C.Brutti<sup>1</sup>, M.E.Biancolini<sup>2</sup>*

*<sup>1,2</sup>Dip. Ingegneria Meccanica – Università di Roma “Tor Vergata”, Via di Tor Vergata  
00133, Rome Italy*

*<sup>1</sup>brutti@ing.uniroma2.it*

*<sup>2</sup>biancolini@ing.uniroma2.it*

## **Sommario**

Di recente molti sforzi di ricerca sono stati dedicati alla messa a punto di procedure affidabili per valutare la formazione e la propagazione di cricche di fatica in prossimità di concentrazioni di tensione. Tali procedure, basate sull'elaborazione di dati sperimentali e tutte derivanti da modificazioni della classica legge di Paris, richiedono la conoscenza del campo tensionale intorno alla cricca e la sua variazione sul fronte di essa per valutare, durante la propagazione, oltre all'aumento delle dimensioni della cricca stessa, anche il mutamento della sua forma.

Nel presente lavoro viene sviluppata una metodologia numerica, fondata sull'uso di modelli ad elementi finiti, in grado di valutare il campo tensionale tridimensionale intorno ad una cricca, di forma qualsiasi, posta in prossimità di una singolarità di forma, in una barra cilindrica sottoposta a condizioni di carico assialsimmetriche. Nel lavoro vengono discusse le procedure numeriche più affidabili per la valutazione del campo, analizzando comparativamente la precisione dei risultati rispetto a dati di riferimento reperibili in bibliografia. Durante la fase di propagazione, assumendo un comportamento elastoplastico del materiale, vengono valutate le caratteristiche fondamentali del campo tensionale su tutto il fronte della cricca in modo da poter prevedere in modo affidabile l'evoluzione della forma durante la propagazione. Una procedura automatica adatta il modello FEM tridimensionale, modificando quello originale, in funzione della variazione della forma della cricca durante la propagazione.

La procedura messa a punto fornisce risultati in buon accordo con i dati sperimentali ottenuti da altri autori ed è quindi uno strumento affidabile per lo studio teorico della propagazione delle cricche di fatica.

## **1 Introduzione**

Nella pratica ingegneristica corrente, il calcolo della resistenza a fatica degli organi meccanici è ancora eseguito, nella maggior parte dei casi, sulla base del confronto degli sforzi efficaci, agenti nell'elemento, con i valori limiti di resistenza del materiale, desunti da prove sperimentali, opportunamente adattati alle condizioni effettive di lavoro e diminuiti mediante

appositi coefficienti, detti di sicurezza [1,2]. Tale procedura prescinde evidentemente dall'applicazione degli strumenti teorici, numerici e sperimentali della meccanica della frattura [3]. Questi ultimi, allo stato attuale, vengono applicati nella valutazione della resistenza e della durata di elementi saldati [4] o di recipienti in pressione [5], con approcci sia di tipo deterministico, sia di tipo probabilistico [6]. L'estensione dell'applicazione degli strumenti tipici della meccanica della frattura anche ad organi meccanici comuni è, allo stato attuale, estesamente indagata da numerosi gruppi di ricercatori, sia per mettere a punto modelli affidabili per la valutazione dello stadio di enucleazione del difetto [7,8] sia per perfezionare i modelli attualmente disponibili riguardanti la propagazione del difetto all'interno dell'organo in studio [9,10]. Quest'ultimo problema è fortemente influenzato dal fatto che gli organi meccanici di impiego usuale sono caratterizzati da numerose singolarità di forma che alterano profondamente il campo tensionale e determinano la necessità di abbandonare l'approccio lineare (LEFM) per utilizzare estesamente la meccanica della frattura elastoplastica (EPFM). La ricerca internazionale, per questo specifico problema, procede attualmente sia nella direzione di una più accurata ed agevole determinazione del campo tensionale e di deformazione, mediante modelli numerici, sia attraverso la determinazione di leggi di propagazione specifiche, tarate sulla base di alcuni dati sperimentali. Per quest'ultimo problema sono disponibili nella bibliografia internazionale di riferimento numerosi contributi riguardanti la propagazione di cricche ellittiche in piastre [11] o in elementi assialsimmetrici con o senza intagli [12]. Ad esempio basandosi su una soluzione particolare del fattore di intensità degli sforzi, fornita da Yates [13], è stato recentemente proposto un modello elasto-plastico per barre con intagli circolari [14,15].

La propagazione di cricche in prossimità di una singolarità di forma coinvolge anche il problema di valutare, in funzione dei parametri caratteristici del campo delle tensioni e delle deformazioni, l'evoluzione della forma della cricca. A tale riguardo fondamentale è il contributo, numerico e sperimentale, fornito da Carpinteri [16] per lo studio dell'evoluzione della forma di cricche ellittiche in provini lisci o con intagli.

Nel presente lavoro viene proposto un modello di tipo elasto-plastico per la valutazione della vita a fatica di elementi di forma e condizione di carico assialsimmetriche, dotati di singolarità geometriche e in cui sia presente una cricca piana di forma qualsiasi. Per la valutazione della prima parte della vita a fatica, cioè quella per la quale la cricca è immersa nella zona in cui il campo tensionale è governato dalla concentrazione di tensione, è stato impiegato il modello di Ahmad e Yates. Per la valutazione dell'estensione della zona plastica in prossimità della cricca è stato utilizzato un modello FEM assialsimmetrico. In un precedente lavoro [17], questo modello è stato già impiegato con risultati confortanti imponendo l'evoluzione della forma della cricca in accordo ai risultati ottenuti in [16]. Nel presente lavoro è stata implementata una procedura numerica automatica in grado di valutare le grandezze caratteristiche del campo delle tensioni e delle deformazioni sul bordo della cricca e di adattare la forma di quest'ultima e il modello FEM all'evoluzione durante la propagazione. Basandosi sui dati così ottenuti la legge di propagazione è stata integrata per fornire la durata a fatica dell'elemento ottenendo un buon accordo con i dati sperimentali pubblicati da altri autori [10].

## **2 Il modello di previsione della vita a fatica**

La vita a fatica di un elemento dotato di singolarità di forma e in presenza di una cricca superficiale può essere divisa in due parti: la prima in cui la cricca, di ridotte dimensioni, si propaga nella zona influenzata dalla presenza dell'intaglio, la seconda in cui la propagazione è regolare ed è governata da una legge esponenziale del tipo della legge di Paris.

## 2.1 Fase di innesco

In [14] è stato proposto di considerare la propagazione di una cricca in prossimità di un intaglio come intimamente legata alla microstruttura del materiale. Anche per carichi estremamente modesti si genera una zona plasticizzata che circonda completamente la cricca; è chiaro dunque che le condizioni di applicabilità della legge di Paris non sono più verificate in quanto strettamente legate alla validità della LEFM. E' necessario quindi riferirsi a risultati sperimentali appositamente ricavati come quelli riportati in [18], dove è stata proposta la relazione valida per il primo stadio di propagazione:

$$\frac{da}{dN} = C(d - a_s) \quad (1)$$

dove  $a_s$  è la lunghezza della cricca superficiale,  $d$  è la distanza tra le barriere microcristalline e  $C$  dipende dal carico applicato e dalle proprietà del materiale. Il modello proposto da Ahmad e Yates è derivato da quello proposto da Hobson, utilizzando al posto di  $a_s$  la lunghezza della cricca  $c$ , e sostituendo la distanza  $d$  con il valore di  $Dn$ , estensione della zona plastica alla radice dell' intaglio.

Pertanto si ha :

$$\frac{da}{dN} = C(\Delta n - c) \quad (2)$$

Sperimentalmente è ben noto che la velocità di propagazione è maggiore nella zona influenzata dalla presenza della concentrazione di tensione dovuta all' intaglio. Ahmad e Yates hanno proposto di utilizzare la correzione della lunghezza della cricca proposta da Smith e Miller [19] valida se la cricca è nella regione influenzata dall' intaglio altrimenti si pone  $e = D$ :

$$e = 7.691c \sqrt{\frac{D}{r}} \quad c < 0.13\sqrt{Dr} \quad ; \quad e = D \quad c \geq 0.13\sqrt{Dr} \quad (3)$$

Inglobando questa correzione nella (2) si ottiene:

$$\frac{da}{dN} = C(\Delta n - a) \quad ; \quad \text{con } a = c + e \quad (4)$$

Il coefficiente  $C$  può essere ricavato sperimentalmente attraverso prove di fatica ad elevato livello di deformazione in provini privi di intaglio. Utilizzando i dati ricavati per l' acciaio HY80 (AISI 1080, StE 790), con una percentuale di sopravvivenza del 95% si giunge alla seguente formula:

$$C = C_1 e_a^m \quad (5)$$

dove  $C_1$  e  $m$  sono parametri caratteristici del materiale e  $e_a$  è la deformazione massima alla radice dell' intaglio. Quando la cricca è di lunghezza tale da emergere dalla zona influenzata dall' intaglio, è possibile ricorrere ad una legge di propagazione tipo Paris-Erdogan. Ovviamente prima di procedere all' uso di tale legge è necessario verificare se  $\Delta K$  è maggiore del livello di soglia: in caso contrario si è di fronte ad una cricca che non si propaga ulteriormente.

## 2.2 Propagazione stabile

La legge di crescita è basata sul parametro globale  $K_I$  ma viene applicata localmente secondo l' approccio proposto da Lin e Smith [12]. Per la simmetria del problema, nella geometria e nelle condizioni di carico, la cricca risulta contenuta nel piano di simmetria. La direzione di avanzamento di ogni punto della cricca appartiene pertanto a tale piano, ed è orientata come la normale locale al fronte della cricca (puro modo I).

Il parametro  $K_I$  è generalmente variabile lungo il fronte della cricca, per cui, dopo un certo numero di cicli, le porzioni di fronte di cricca soggette a valori maggiori del  $K_{Ic}$ , avanzeranno

di un aliquota maggiore rispetto alle altre. Matematicamente ciò può essere espresso dalla seguente generalizzazione della legge di Paris in forma locale:

$$\frac{da}{dN}(\mathbf{x}) = C\Delta K(\mathbf{x})^m \quad (6)$$

dove con  $\xi$  si è indicata l'ascissa curvilinea rappresentante la generica posizione sul fronte della cricca.

Supponendo di avere degli incrementi piccoli della lunghezza della cricca è possibile trascurare la variazione di  $\Delta K$  dovuta all'avanzamento della cricca, e determinare la nuova posizione del fronte:

$$\Delta a(\mathbf{x}) = \left( \frac{\Delta K(\mathbf{x})}{\Delta K_{\max}} \right)^m \Delta a_{\max} \quad (7)$$

Imponendo valori costanti dell'incremento massimo della lunghezza della cricca è possibile determinare il numero di cicli associato ad ogni incremento massimo secondo la seguente integrazione numerica della legge di Paris:

$$\Delta N = \frac{\Delta a_{\max}}{C\Delta K^n} \quad (8)$$

### 3 Implementazione numerica del modello

L'implementazione numerica del modello di crescita è stata realizzata in ambiente Visual Basic 5.0. E' stato appositamente sviluppato un software interattivo per ottenere una rapida visualizzazione del modello e dei risultati parziali in tempo reale.

Il programma è costituito da una serie di moduli per seguire la vita a fatica del pezzo. La vita totale del pezzo viene divisa in due fasi. Durante la prima fase del calcolo si segue la cricca con il modello di Ahamad e Yates. Durante la seconda fase l'evoluzione della cricca viene seguita calcolando i valori locali del  $K_I$  e tenendo conto delle variazioni di forma. La vita totale risulta pertanto data da:

$$N_{total} = N_{initiation} + N_{propagation} = \frac{1}{C_1 e_a^{m_1}} \int_{a_i}^{a_f} \frac{da}{\Delta n - a} + \frac{1}{C} \int_{a_i}^{a_f} \frac{da}{\Delta K^m} \quad (9)$$

Per la prima parte si considera una dimensione iniziale  $a_i$  pari alla rugosità totale del pezzo; la transizione tra propagazione in regime elastoplastico ed in regime lineare avviene quando la lunghezza della cricca uguaglia l'estensione della zona plastica alla radice dell'intaglio  $a_i$ ; la lunghezza finale dipende dal carico applicato, e corrisponde alla lunghezza critica  $a_f$ .

I vari moduli del programma eseguono ciclicamente le seguenti operazioni elementari:

- preparazione del modello geometrico
- preparazione della *mesh* 2D
- scrittura del file dati NASTRAN per il modello 3D
- lettura del  $K_I$  calcolato con il codice FEM
- avanzamento della cricca basato sul  $\mathbf{D}_{a_{max}}$  imposto

La preparazione del modello geometrico è stata predisposta per ottenere la massima generalità, rappresentando la cricca con una generica polilinea, il programma provvede poi a dividere tale polilinea in segmenti uguali.

La *mesh* 2D è costituita da una parte strutturata, ottenuta proiettando in direzione normale il fronte della cricca, e da una parte non strutturata, per riempire le zone davanti e dietro al fronte della cricca (vedi fig.1  $dx$ ). La parte non strutturata viene realizzata con il programma *Easymesh* [21].

Il file dati NASTRAN viene generato in maniera completamente automatica per un modello tridimensionale, ottenuto estrudendo la *mesh* piana. Si utilizza quindi il solutore NASTRAN per ottenere i parametri locali della LEFM, che vengono calcolati leggendo il file di output del solutore ed utilizzati per avanzare la cricca.

### 3.1 Calcolo dei parametri locali

Per determinare l'algoritmo più efficiente per il calcolo dei parametri locali per mezzo del metodo FEM, è stato effettuato un test preliminare su una geometria semplice. Il valore di  $K_I$  è stato calcolato a parità di *mesh* con tre metodi; il primo è di tipo energetico e consiste nel calcolare l'energia di Griffith dal lavoro di richiusura della cricca (VCC).

$$G = -\frac{1}{2} \frac{Fu}{B\Delta a} \quad K = \sqrt{GE} \quad (10)$$

Il secondo metodo è basato sulla sostituzione degli spostamenti nodali vicino all'apice della cricca nella funzione degli spostamenti di Westeergard, per ottenere il parametro incognito  $K_I$ . Il terzo metodo è basato anch'esso sulla sostituzione, e sfrutta la ben nota singolarità degli elementi isoparametrici, ottenuta spostando il nodo centrale in posizione di quarter-point (QPE); tali elementi, a parità di *mesh*, producono risultati molto più precisi.

$$K = G \sqrt{\frac{2p}{r_{1/4}}} \left( \frac{u_{1/4}}{2(1-n)} \right) \quad (11)$$

L'errore relativo rispetto al valore teorico, si è attestato sul 7% per i QPE, al 16% con la sostituzione semplice, ed al 4% con il metodo VCC; tutti i calcoli sono stati effettuati a parità di *mesh*. Avendo usato come codice di calcolo il Nastran V70.5 si è deciso di testare un'ulteriore possibilità per il calcolo dei parametri locali di campo. Il Nastran dispone infatti di elementi speciali (CRAC2D, CRAC3D) basati direttamente su una formulazione singolare[20]. Utilizzando tali elementi è possibile decidere l'ordine della singolarità (in questo caso si è comunque usato l'esponente 0.5) ed ottenere dei risultati accurati in un singolo lancio, anche con una *mesh* molto rada. Il test è stato effettuato per una geometria tridimensionale, calcolando i valori del  $K_I$  lungo il fronte ellittico di una cricca di bordo, per un provino circolare liscio sottoposto a trazione. La stessa *mesh* è stata utilizzata per calcolare i valori di  $K$  con il metodo degli spostamenti. Gli elementi dedicati producono dei risultati in ottimo accordo con i valori di riferimento (2%), mentre con il metodo degli spostamenti si ottiene un errore di circa il 20%.

### 4 Discussione dei risultati

Per verificare l'affidabilità del modello esposto sono state effettuate diverse verifiche ed analisi.

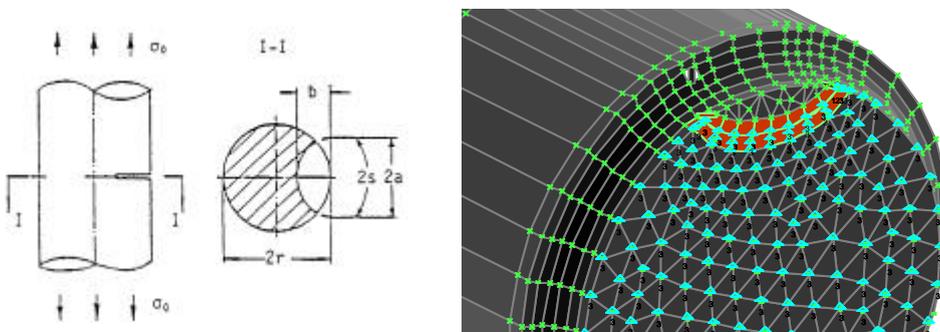


Figura 1: parametri geometrici della cricca di bordo( $sx$ ); modello FEM di provino intagliato( $dx$ ).

Come già esposto precedentemente, la bontà dei parametri di campo ottenuti con il modello FEM è stata preliminarmente validata mediante confronto con dati teorici di riferimento, ottenendo un buon accordo. Al fine di verificare la corretta evoluzione dei parametri di forma della cricca, e dei parametri di campo, sono stati effettuati diversi test di crescita per provini lisci ed intagliati. In particolare si è considerata una geometria iniziale della cricca perfettamente circolare, ed una geometria completamente piatta. L'evoluzione di questi due tipi di cricca è stata studiata per due geometrie differenti, una con intaglio ed una senza. Entrambi questi studi sono stati confrontati, ottenendo un ottimo accordo, con i risultati di letteratura [12]. I parametri di forma della cricca e del provino sono riportati nella figura 1, nella stessa figura è rappresentato inoltre il modello FEM tridimensionale parametrico relativo ad una particolare geometria.

#### 4.1 Studio della propagazione della cricca in un provino liscio

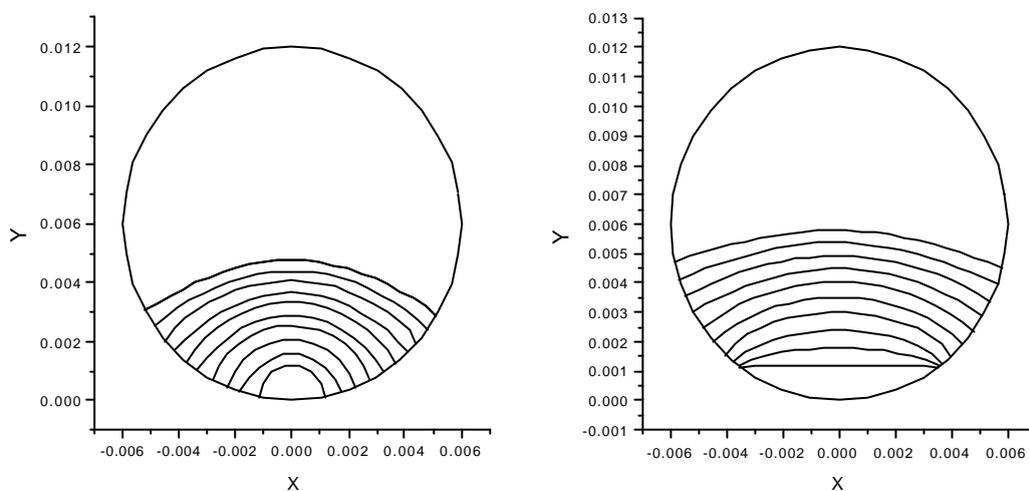


Figura 2: Evoluzione della forma della cricca per una barra liscia (sx: cricca inizialmente circolare, dx: cricca inizialmente piatta).

Nella figura 2 si riporta l'evoluzione della forma della cricca. Come si può osservare dalla figura la cricca piatta e la cricca circolare tendono entrambe ad un'ellisse; tale configurazione corrisponde al minimo gradiente di  $K$  lungo la cricca. La cricca circolare cresce in maniera più consistente vicino ai bordi nei primi passi di calcolo, mentre la cricca piatta, cresce molto nella parte centrale. Nella figura 3 è riportato l'andamento dei parametri geometrici e di campo per le due geometrie iniziali. Tali valori sono in ottimo accordo con il riferimento di letteratura.

#### 4.2 Studio della propagazione in un provino intagliato

Nella figura 4 si riporta l'evoluzione della forma della cricca per un provino intagliato. Come si può osservare dalla figura anche in questo caso, la forma della cricca tende ad una geometria indipendente dalle condizioni iniziali, ma in questo caso si sente profondamente l'influenza dell'intaglio. L'effetto dell'intaglio porta ad avere valori di  $K$  molto più elevati ai bordi, e la cricca, avanzando, tende a diventare comunque piatta, e successivamente ad invertire la curvatura. Anche in questo caso sono stati calcolati i parametri caratteristici i quali sono risultati in ottimo accordo con il riferimento di letteratura.

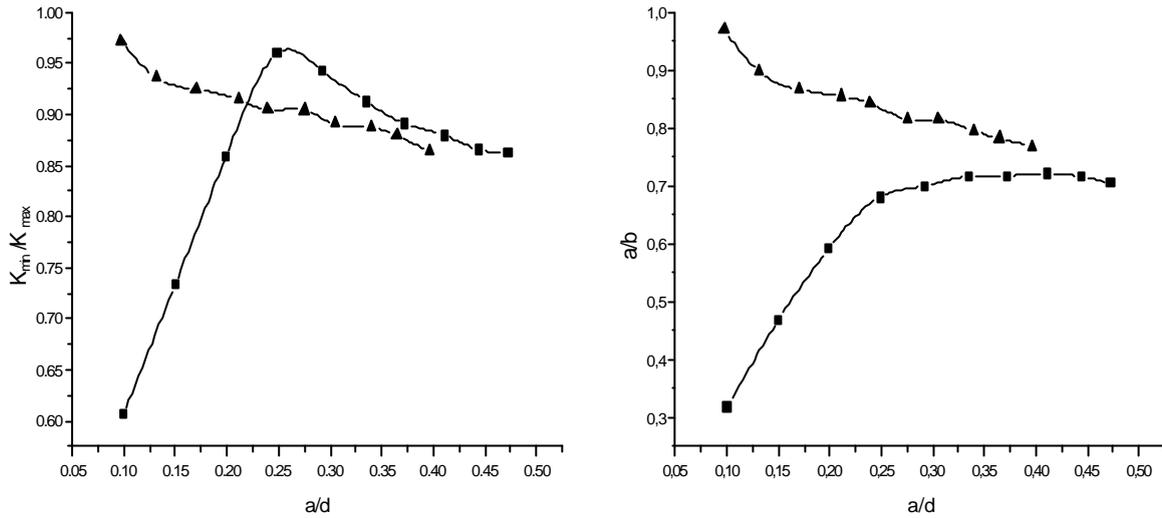


Figura 3 : Evoluzione dei parametri di campo e dei parametri di forma della cricca per una barra liscia (triangoli: cricca inizialmente circolare, quadrati: cricca inizialmente piatta).

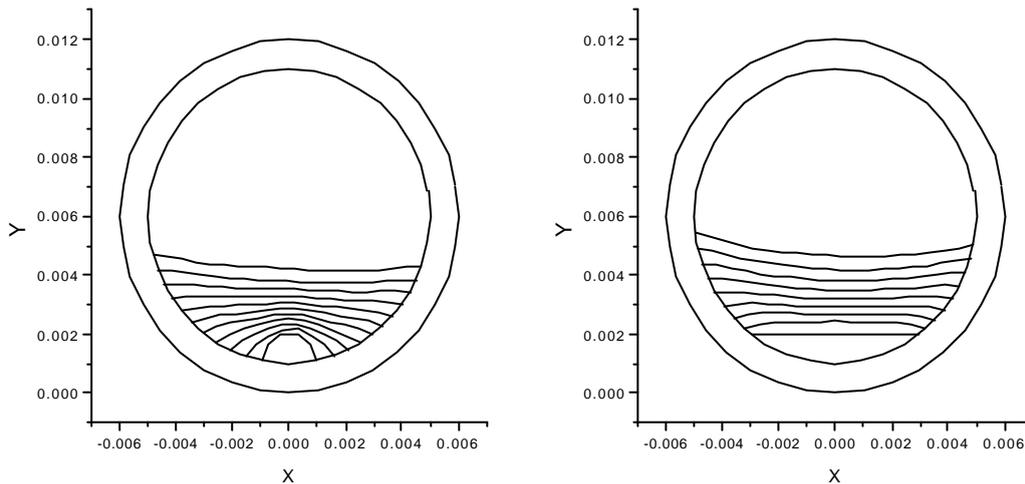


Figura 4: Evoluzione della forma della cricca per una barra intagliata (sx: cricca inizialmente circolare, dx: cricca inizialmente piatta).

### 4.3 Applicazione del modello completo

Il modello numerico di calcolo è stato utilizzato per la stima della vita a fatica di un provino intagliato. Per verificare la bontà dei risultati si è usata una geometria di riferimento identica a quella riportata nel lavoro di Ahmad e al. [15] e ci si è riferiti ai dati sperimentali riportati da questi autori. Si è preso in considerazione un provino a sezione circolare, diametro  $d=12$  mm, profondità dell'intaglio semicircolare  $D=1$  mm, raggio dell'intaglio  $r=1$  mm, lunghezza del modello ad elementi finiti (metà del modello per ipotesi di simmetria)  $l=25$  mm. Fattore di concentrazione teorico delle tensioni  $K_T=2.3$ . Il materiale impiegato è un acciaio di media resistenza con una struttura bainitica denominato HY80, Standard Number 1.6780. La composizione chimica nominale è 2.8 % Ni, 1.4% Cr, 0.4% Mo, 0.15% C. Il comportamento alla sollecitazione ciclica è rappresentato da un'equazione del tipo di Ramberg-Osgood:

$$\mathbf{e} = \frac{\mathbf{S}}{E} + \left( \frac{\mathbf{S}}{K} \right)^{1/N} \quad \text{con } E=2070 \text{ MPa}, K=710 \text{ MPa}, N=0.072.$$

Facendo riferimento alla relazione (4) abbiamo  $C_1 = 4.1 \cdot 10^{-3} e_a^{m_1}$ ,  $m_1 = 2.775$ , con  $e_a$  pari alla deformazione (in %) in corrispondenza della radice dell'intaglio.

Per la stima della vita a fatica nella regione a comportamento elastico lineare abbiamo che risulta valida una legge del tipo:

$$\frac{da}{dN} = C \Delta K^m \text{ con } C = 1.285 \cdot 10^{-11}, m = 2.5, K_{Ic} = 1440 \text{ MPa}(\text{mm})^{0.5}.$$

I risultati ottenuti dal modello sono riportati nella figura seguente, insieme ai dati sperimentali. Nella stessa figura si riporta inoltre l'andamento ottenuto da un modello esclusivamente elastico, nel quale si è trascurato l'effetto della plasticizzazione estesa alla radice dell'intaglio. Come si può osservare, il modello elastico prevede un'evoluzione più lenta del fenomeno, risultando pertanto troppo conservativo mentre i dati ottenuti utilizzando il modello completo risultano in buon accordo con i valori sperimentali.

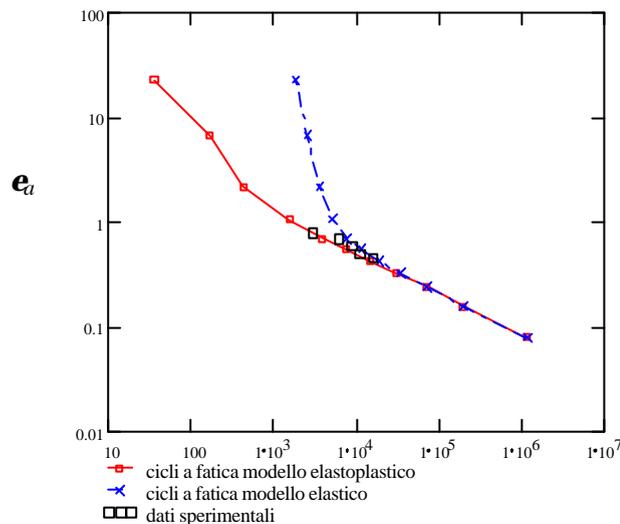


Figura 5: Cicli a fatica in funzione della deformazione  $e_a$  alla radice dell'intaglio.

## 5 Conclusioni

Nel presente lavoro è stato studiato il problema della propagazione di cricche in elementi di forma e condizioni di carico assialsimmetriche dotati di intagli. In tale condizione è necessario tenere conto del comportamento elastoplastico del materiale e della variazione della forma della cricca durante la sua propagazione. Come è noto dai riferimenti bibliografici è possibile distinguere due meccanismi di propagazione diversi: uno valido per la fase in cui la cricca è immersa completamente nella zona influenzata dalla presenza della singolarità di forma ed uno, più regolare, in cui la cricca, ormai dotata di un'estensione superiore alla zona di influenza dell'intaglio, si propaga seguendo una legge del tipo di quella di Paris-Erdogan. La prima fase è stata studiata utilizzando il modello di propagazione proposto da Ahmad e Yates valutando mediante modelli FEM elastoplastici l'estensione della zona plastica alla radice dell'intaglio.

Per la parte di propagazione è stata messa a punto una procedura numerica in grado di valutare correttamente il campo delle tensioni e deformazioni intorno alla cricca, di forma iniziale qualsiasi, allo scopo di determinare la variazione dell'assetto del fronte della cricca durante la propagazione. La procedura sviluppata e implementata è in grado di generare automaticamente i modelli FEM necessari per l'esecuzione dei singoli passi dell'analisi. Basandosi sui dati così ottenuti è possibile integrare la legge di Paris per ottenere la durata a fatica dell'elemento in studio.

La procedura messa a punto è stata applicata ad alcuni casi desunti dalla bibliografia paragonando i risultati ottenuti con quelli sperimentali ricavati da altri autori. Il buon accordo trovato evidenzia che il metodo proposto, tuttora in corso di affinamento, sembra essere uno strumento affidabile per la valutazione della vita a fatica di elementi con intagli dotati di cricche di forma qualsiasi.

## Bibliografia

- [1] M.F. Spotts, Design of Machine Elements, Prentice Hall, 1998, Upper Saddle River, N.J., USA
- [2] E.Zahavi, Fatigue Design. Life Expenctancy of Machine Parts, CRC Press, 1996, Boca Raton (USA)
- [3] T.L. Anderson, Fracture Mechanics, CRC Press, 1995, Boca Raton (USA).
- [4] A.Hobbacher, et al., Fatigue design of welded joints and components, Abington Publishing, 1996, Cambridge, England
- [5] L.Lazzarino, E.Manfredi, Meccanica dei materiali. Problematiche e metodologie, ETS, 1988, Pisa
- [6] E.Vitale, S.Kossev, ed., Numerical Methods for structural integrity evaluation, ETS, 1992, Pisa
- [7] Y.Hong, Y.Qiao, An analysis on overall crack-number-density of short-fatigue-cracks, Mechanics of Materials, 31,1999, 525-534
- [8] Y.Hong, Z.Gu, B.Fang, Y.Bai, Collective evolution characteristics and computer simulation of short fatigue cracks, Philosophical Magazine A, 1997, 75, 6, 1517-1531
- [9] X.Kewei, H.Jiawen, Prediction on notched fatigue limits for crack initiation and propagation, Engineering Fracture Mechanics, 1992, 41, 3, 405-410
- [10] H. Y. Ahmad, M. P. Clode and J. R. Yates. Predicting Notch Fatigue Lifetimes. Proc. Of Fatigue '96, Elsevier.
- [11] X. B. Lin and R.A. Smith, A numerical prediction of fatigue crack growth for a surface defect Fatig. and Fract. of Eng. Mat.and Struct., 1995, 18, 247.
- [12] X. B. Lin and R.A. Smith, Fatigue growth simulation for cracks in notched and unnotched round bars Int. J. Mech. Sci., 1998, 40, 405.
- [13] J. R. Yates. A simple approximation for the stress intensity factor of crack at notch. Journal of strain analysis.1991 **26**, 1.
- [14] H. Y. Ahamad , J. R. Yates. An elastic-plastic model for fatigue crack growth at notches. Fatig. Fract. Engng. Mater. Struct. **17**(6) pp. 651-660.
- [15] H. Y. Ahmad, M. P. Clode and J. R. Yates. Prediction of fatigue crack growth in notched members, International J. of Fatigue, 19, 1997, 703-712
- [16] Carpinteri Elliptical-arc surface cracks in round bars Fatigue and Fracture of Engineering Materials and Structures, 1992, 15, 1141.
- [17] M.E Biancolini, C. Brutti, G. Cappellini, M. D'Ulisse Fatigue life prediction for a cracked notched element under symmetric load condition, Proc. of Damage And Fracture Mechanics 2000, Montreal – Canada, 22-24 May 2000.
- [18] P.D. Hobson, M.W. Brown, E.R. de los Rios (1986) Two phases of short crack growth in a medium carbon steel Behaviour of short fatigue crack (edited by K.J. Miller and E.R. de los Rios) EGF publ.1, MEP, Inst. Mech. Eng. London pp.441-459
- [19] R. A. Smith and K. J. Miller. The growth of fatigue cracks from circular notches. Int. Journ. of Fracture 1973
- [20] MSC NASTRAN User's Guide, Linear Static Analysis, J.P. Caffrey, J.M. Lee
- [21] EasyMesh - <http://fistecpc3.univ.trieste.it:80/~nirftc/research/easymesh/easymesh.html>