

Un modello numerico del tipo Element-Free per la valutazione della singolarità tensionale all'apice di una fessura

A. Carpinteri¹, G. Ferro¹ & G. Ventura²

¹ *Dipartimento di Ingegneria Strutturale, Politecnico di Torino, 10129 Torino.*

² *Istituto di Scienza delle Costruzioni, Università di Catania, 95125 Catania.*

E-Mails : Carpinteri@Polito.it, Ferro@Polito.it, Gventura@isc.ing.unict.it

Sommario

Viene proposta una nuova formulazione per l'analisi numerica del problema della frattura che si inquadra nell'ambito dei metodi "privi di elementi", per cui la discretizzazione del dominio è puramente nodale, eliminando il concetto di connettività. La formulazione è basata sulla costruzione di funzioni di forma attraverso una approssimazione mobile ai minimi quadrati già nota in letteratura [1] la cui peculiarità consiste nella definizione di un funzionale generalizzato dell'energia potenziale totale di tipo lagrangiano aumentato. Tale approccio risolve, in maniera computazionalmente efficiente, alcuni problemi tipici di questi metodi e consente di introdurre un grande numero di moltiplicatori lagrangiani senza aumentare la dimensione del problema ed inducendone peraltro la convessità.

Tale strumento ha consentito la definizione di un nuovo modello per la simulazione della discontinuità della frattura basato sull'imposizione di condizioni di interfaccia in corrispondenza dei lembi di una "frattura virtuale".

Abstract

A new meshless formulation for the numerical analysis of the crack discontinuity is proposed. The domain discretisation is made exclusively in terms of nodes and no connectivity is needed. The formulation is based on the moving least squares approximation [1], and its peculiarity relies in the definition of a generalised augmented lagrangian total potential energy functional. This approach solves, in a computationally effective way, some of the well-known shortcomings of these methods and allows the introduction of a large number of lagrangian multipliers without increasing the size of the problem and enforcing instead its convexity.

The properties of the proposed formulation are utilised for the definition of a new model for the simulation of the crack discontinuity, which enforces interface conditions between the sides of a "virtual crack".

1. Introduzione

La modellazione di alcuni problemi di meccanica dei solidi, come quelli in cui sono presenti discontinuità

o singolarità nei dati o nella soluzione, richiede lo sviluppo di adeguate tecniche di analisi. Per la trattazione di questi problemi si è fatto spesso ricorso ad opportune estensioni del metodo degli elementi finiti, che tuttavia risultano spesso non particolarmente soddisfacenti. Ciò è essenzialmente dovuto al fatto che, essendo il metodo degli elementi finiti basato sulle proprietà di approssimazione locale dei polinomi, sono necessarie discretizzazioni estremamente ricche nelle zone in cui la soluzione è non polinomiale, ed inoltre, nel caso di problemi evolutivi con linee di discontinuità mobili, come quelli di propagazione della frattura, si richiede la continua ridefinizione della mesh di elementi. Per superare queste difficoltà sono stati recentemente sviluppati metodi numerici in cui l'approssimazione viene costruita esclusivamente in termini di nodi. Tali metodi si dividono essenzialmente in due classi: (a) metodi basati su estensioni dell'approccio alle differenze finite [2] e (b) metodi basati sulla introduzione di concetti derivati dalle teorie di interpolazione dei dati in uno schema variazionale [3,4]. Questi ultimi hanno recentemente ricevuto sostanziali impulsi dal lavoro di diversi Autori e sono stati inquadrati in un approccio matematicamente unitario attraverso i contributi di Babuska & Melenk [5] e Duarte & Oden [6], che hanno riconosciuto come essi appartengano ad una più ampia classe di metodi basati sul concetto di partizione dell'unità. Una proprietà particolarmente attraente di questi metodi consiste nella possibilità di costruire le funzioni di interpolazione a partire da una base prefissata di funzioni. Ciò consente di introdurre nell'interpolazione integrali noti per il problema in esame, migliorando significativamente le proprietà di approssimazione. Un esempio tipico è l'introduzione dell'integrale \sqrt{r} nei problemi di meccanica della frattura elastica lineare.

Nel presente lavoro viene introdotto un metodo in cui le "funzioni di forma" vengono generate utilizzando una approssimazione mobile ai minimi quadrati (MLSA, Moving Least Squares Approximation) [1,7], mentre la formulazione variazionale è basata sull'introduzione di un funzionale generalizzato dell'energia potenziale totale di tipo lagrangiano aumentato il cui punto sella nelle variabili dirette (variabili nodali di approssimazione) e duali (moltiplicatori lagrangiani) costituisce la soluzione del problema.

Tale approccio consente di imporre le condizioni al contorno essenziali ed in generale vincoli sulle variabili di stato (quali condizioni di interfaccia) in maniera efficiente, in quanto la soluzione viene determinata iterando alternativamente sulle variabili dirette e duali mentre l'Hessiano del funzionale rispetto alle variabili dirette risulta bandato e definito positivo. Vengono quindi superati gli inconvenienti evidenziati da vari Autori [1] nella imposizione delle condizioni al contorno.

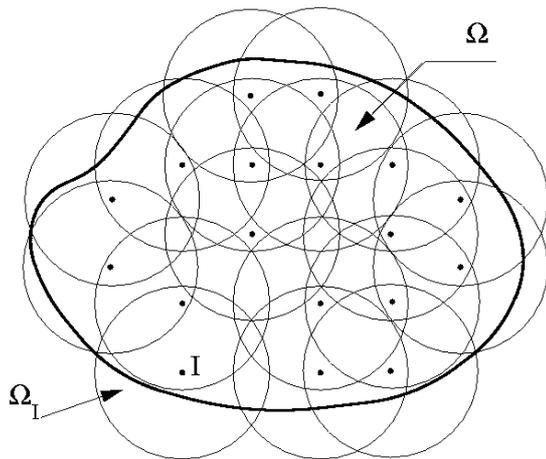
La possibilità di introdurre un elevato numero di moltiplicatori lagrangiani senza degradare le prestazioni del metodo ha consentito di definire un nuovo modello per la trattazione della frattura basato sulla imposizione di condizioni di continuità degli spostamenti e delle deformazioni lungo una "frattura virtuale". Tale modello abbandona quindi gli schemi basati su modificazioni anche complesse delle funzioni peso con cui il problema viene affrontato in letteratura [8].

Dopo una descrizione della costruzione delle "funzioni di forma" MLSA, queste vengono introdotte nella formulazione variazionale lagrangiana aumentata del problema. Viene inoltre descritto il modello della "frattura virtuale" e si riportano i risultati di una applicazione numerica.

2. Approssimazione MLS.

Nel presente paragrafo viene descritta brevemente l'approssimazione mobile ai minimi quadrati utilizzando la notazione riportata in [1]. Questa tecnica fornisce l'approssimazione di una funzione attraverso i valori che essa assume in un insieme di punti, utilizzando una base prefissata di funzioni ed opportune funzioni peso. Si consideri l'approssimazione di una funzione scalare $u(x)$ in un dominio Ω e siano $x_I, I = 1 \dots N, x_I \in \Omega$ un insieme di nodi ed u_I i valori della funzione da approssimare in corrispondenza degli stessi. Siano inoltre $w_I = w(x - x_I)$ delle funzioni peso con supporto compatto. Se il supporto delle funzioni peso w_I viene assunto circolare e di raggio r_I , poiché esse devono assumere

valore massimo in ciascun punto x_I , le stesse costituiscono un insieme di funzioni a bolla (fig. 1).



La funzione approssimante MLS, $u^k(x)$, è definita mediante la combinazione lineare di una base prefissata di m funzioni $p_i(x)$ i cui coefficienti a_i dipendono dal punto x :

$$u^k(x) = \sum_{i=1}^m p_i(x) a_i(x) = \underbrace{\{p(x)\}^T}_{(1 \times m)} \underbrace{\{a(x)\}}_{(m \times 1)} \quad (1)$$

I coefficienti $a_i(x)$ vengono determinati imponendo che il quadrato della differenza $u^k(x) - u(x)$ tra la funzione approssimata e la funzione esatta nei punti x_I sia minimo. Si introduce pertanto il seguente funzionale :

$$J(x) = \frac{1}{2} \sum_{I=1}^n w(x - x_I) \left[\sum_{i=1}^m p_i(x_I) a_i(x) - u_I \right]^2, \quad (2)$$

dove la presenza delle funzioni peso w_I rende locale l'approssimazione, nel senso che, nella definizione di $J(x)$, intervengono solo gli n punti le cui funzioni peso hanno supporto contenente il punto x . Il minimo di $J(x)$ porge i valori di $a_i(x)$ in funzione delle u_I nella forma :

$$\underbrace{\{a(x)\}}_{(m \times 1)} = \underbrace{[D(x)]}_{(m \times n)} \underbrace{\{u\}}_{(n \times 1)} \quad (3)$$

Introducendo l'eq. (3) nell'eq. (1) si ottiene:

$$u^k(x) = \sum_{i=1}^m p_i(x) a_i(x) = \underbrace{\{p(x)\}^T}_{(1 \times m)} \underbrace{[D(x)]}_{(m \times n)} \underbrace{\{u\}}_{(n \times 1)} = \underbrace{\{\phi(x)\}^T}_{(1 \times n)} \underbrace{\{u\}}_{(n \times 1)} \quad (4)$$

Le funzioni $\phi(x)$ sono comunemente dette "funzioni di forma" dell'approssimazione MLS in quanto l'eq. (4) è formalmente coincidente con le formule di interpolazione utilizzate nel metodo degli elementi finiti. L'approssimazione MLS, eq. (4), gode della proprietà che ognuna delle funzioni presenti nella base $\{p(x)\}$ venga descritta esattamente dall'approssimazione. Essa inoltre possiede le caratteristiche di continuità e differenziabilità delle funzioni della base e delle funzioni peso. Naturalmente, affinché il

minimo del funzionale $J(x)$ possa essere calcolato, è necessario che siano soddisfatte opportune ipotesi sulle funzioni che compongono la base, sulle funzioni peso e sulla topologia delle loro intersezioni.

Si osservi infine che, mentre le funzioni di forma utilizzate nel metodo degli elementi finiti garantiscono il soddisfacimento automatico delle condizioni al contorno essenziali, le funzioni di forma MLS non godono di tale proprietà in quanto, in generale, dall'eq. (4) risulta $u^h(x_I) \neq u_I$. E' dunque necessario utilizzare l'eq. (4) nell'ambito di una formulazione che preveda l'imposizione esplicita di tali condizioni.

3. Formulazione variazionale lagrangiana aumentata.

Nella sezione precedente si è illustrata la costruzione delle funzioni di forma MLS con riferimento ad una funzione scalare. Nel seguito, al fine di semplificare la notazione, si continuerà ad indicare con $u^h(x)$ l'approssimazione MLS della funzione (vettoriale) spostamento, in cui ciascuna componente è descritta mediante l'eq. (4). La soluzione del problema dell'equilibrio elastico di Cauchy sul dominio Ω è data dal punto di minimo del seguente funzionale dell'energia potenziale generalizzato, in cui ai campi di spostamenti e deformazioni esatti sono state sostituite le rispettive approssimazioni MLS:

$$\Pi(u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \{\delta\}^T [E] \{\delta\} d\Omega - \int_{\Gamma_q} \{u^h\}^T \{q\} dS + \int_{\Gamma_u} \text{ind}(\{u^h\} - \{\bar{u}\}) dS, \quad (5)$$

dove $[E]$ è l'operatore elastico, $\{\delta\}$ il vettore delle deformazioni, mentre $\{q\}$ e $\{\bar{u}\}$ sono le forze e gli spostamenti assegnati al contorno. La funzione indicatrice $\text{ind}(\{u^h\} - \{\bar{u}\})$ assume il valore $+\infty$ quando $\{u^h\} \neq \{\bar{u}\}$, zero in caso contrario. Tale termine introduce le condizioni al contorno essenziali tra le equazioni di Eulero-Lagrange del funzionale $\Pi(u)$ che risulta non differenziabile.

Al fine di rendere continuo e differenziabile il funzionale $\Pi(u)$ si introducono le reazioni vincolari nodali $\{r\}$ e l'ultimo addendo viene sostituito dalla sua regolarizzazione lagrangiana aumentata [9]:

$$\int_{\Gamma_u} \text{ind}(\{u^h\} - \{\bar{u}\}) dS = \max_{\{r\}} \left(\{r\}^T (\{\bar{u}\} - \{u^h\}) + \frac{1}{2} \alpha (\{\bar{u}\} - \{u^h\})^2 \right), \quad (6)$$

in cui $\alpha > 0$ è il parametro di penalizzazione, mentre le reazioni $\{r\}$ hanno il ruolo di moltiplicatori lagrangiani. Sia $[G_u]$ la matrice delle funzioni di forma MLS, tale che $\{u^h(x)\} = [G_u(x)]\{u\}$, e sia $\{s(x)\} = [G_s(x)]\{u\} = \text{Symgrad}([G_s(x)]\{u\})$. Introducendo l'eq. (6) nell'eq. (5) si ottiene il seguente funzionale :

$$\begin{aligned} \Pi_{AL}(u, r) = & \frac{1}{2} \{u\}^T \int_{\Omega} [G_s]^T [E] [G_s] d\Omega \{u\} - \{u\}^T \int_{\Gamma_q} [G_u]^T \{q\} dS + \\ & + \{r\}^T (\{\bar{u}\} - [G_r]\{u\}) + \frac{1}{2} \alpha (\{\bar{u}\} - [G_r]\{u\})^2, \end{aligned} \quad (7)$$

che può risciversi in forma compatta come :

$$\Pi_{AL}(u, r) = \frac{1}{2} \{u\}^T [K] \{u\} - \{f\}^T \{u\} + \{r\}^T (\{\bar{u}\} - [G_r]\{u\}) + \frac{1}{2} \alpha (\{\bar{u}\} - [G_r]\{u\})^2, \quad (8)$$

essendo $[G_r]$ la restrizione di $[G_u]$ a $\mathcal{A}\Omega_u$. Le quadrature sul dominio Ω e sulla sua frontiera vengono realizzate per integrazione gaussiana definita su una mesh di elementi finiti di sfondo. Essi giocano il ruolo di celle di integrazione e determinano la forma geometrica del dominio senza intervenire sulle proprietà dell'approssimazione MLS.

Il principio di minimo per il funzionale non differenziabile $\Pi(u)$ viene dunque trasformato nel seguente principio di stazionarietà per il funzionale Π_{AL} :

$$\min_{\{u\}} \max_{\{r\}} \Pi_{AL}(\{u\}, \{r\}), \quad (9)$$

la cui soluzione numerica viene ottenuta mediante l'algoritmo del lagrangiano aumentato. Esso, nella sua forma più semplice, è basato su iterazioni alterne sulle variabili dirette e duali fino al raggiungimento della convergenza, secondo lo schema :

$$\begin{aligned} \{r\}^i &= \arg \max_{\{r\}} \Pi_{AL}(\{u\}^i, \{r\}), & (10.a) \\ \{u\}^{i+1} &= \arg \min_{\{u\}} \Pi_{AL}(\{u\}, \{r\}^i). & (10.b) \end{aligned}$$

L'iterazione sulle variabili duali $\{r\}$, eq. (10.a), può essere realizzata mediante la formula di Hestenes e Powell [10,11], che equivale ad utilizzare l'algoritmo della massima pendenza sul problema duale:

$$\{r\}^i = \{r\}^{i-1} + \alpha (\bar{u}) - [G_r] \{u\}^i. \quad (11)$$

Il valore del parametro di penalizzazione α può assumere un valore costante o essere opportunamente modificato nelle iterazioni. Il suo valore controlla la velocità di convergenza nelle variabili duali ed assicura che l'Hessiano del funzionale Π_{AL} sia definito positivo e ben condizionato. Il minimo sulle variabili dirette $\{u\}$ può essere dunque determinato iterando alla Newton sulle variabili $\{u\}$ e tenendo fisso il valore delle variabili duali $\{r\}$.

Mentre gli approcci classici, basati sull'impiego di moltiplicatori lagrangiani e su principi variazionali alla Galerkin, producono sistemi di equazioni lineari la cui matrice dei coefficienti è indefinita, non bandata e di dimensione pari alla somma delle variabili dirette e duali, l'approccio proposto presenta i seguenti vantaggi :

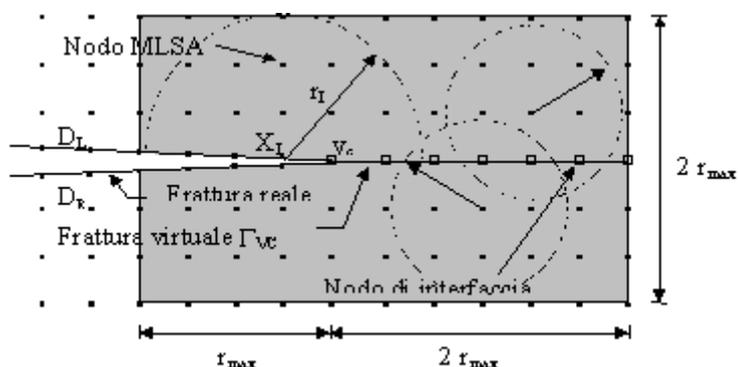
- l'Hessiano del funzionale rispetto alle variabili $\{u\}$ è definito positivo, bandato e necessita, se α è costante, di un'unica fattorizzazione;
- le condizioni di vincolo vengono soddisfatte con elevata precisione in poche iterazioni;
- può essere introdotto un grande numero di vincoli in quanto la determinazione dei moltiplicatori (variabili duali) avviene con scarsissimo onere computazionale, eq. (11), e la dimensione del problema nelle variabili dirette rimane immutata.

Il metodo consente quindi un'agevole introduzione delle condizioni al contorno in problemi di grandi dimensioni (quanto a numero di variabili) ed il soddisfacimento estremamente preciso dei vincoli, evitando gli inconvenienti sottolineati in letteratura nell'utilizzo di moltiplicatori lagrangiani o principi variazionali modificati [12] e rendendo non necessarie tecniche quali l'accoppiamento con elementi finiti ai fini della imposizione delle condizioni al contorno [1]. Inoltre, ulteriori vincoli (ad esempio, condizioni di interfaccia) possono essere aggiunti in maniera immediata.

4. Modellazione della frattura.

Una importante proprietà dell'approssimazione MLS consiste nel produrre soluzioni con il desiderato grado di continuità e differenziabilità attraverso una opportuna scelta delle funzioni peso e delle funzioni di base. Ne segue che la trattazione di discontinuità, come quelle relative ad interfacce tra differenti materiali o a fessure, richiede uno speciale approccio.

L'accoppiamento tra materiali diversi è stato affrontato mediante l'imposizione di condizioni di continuità lungo la linea di interfaccia con il metodo dei moltiplicatori di Lagrange [13] e soffre degli inconvenienti numerici evidenziati a proposito del problema delle condizioni al contorno. Il problema della discontinuità della frattura, e più in generale di domini di forma non convessa, viene trattato in letteratura attraverso opportune modificazioni dei supporti delle funzioni peso [8]. La modificazione dei supporti delle funzioni peso non introduce infatti variabili aggiuntive, sebbene la determinazione delle funzioni di forma e delle loro derivate risulti maggiormente laboriosa. Nell'ottica della formulazione lagrangiana aumentata del metodo, tuttavia, poiché le condizioni di interfaccia possono essere imposte in maniera computazionalmente conveniente, si è definito un nuovo modello che evita la modificazione dei supporti delle funzioni peso.



In tale modello la frattura viene virtualmente estesa nella direzione della tangente all'apice (fig. 2). Tutte le funzioni peso i cui supporti intersecano la frattura reale vengono tagliate

sia lungo la frattura reale che lungo quella virtuale (vengono cioè considerati appartenenti alla parte destra D_R o sinistra D_L del solido fessurato), mentre le funzioni peso i cui supporti intersecano solo la frattura virtuale rimangono invariate. Il modello introduce una linea di discontinuità lungo la frattura virtuale, a causa del taglio dei supporti delle funzioni peso, che viene eliminata introducendo una serie di nodi di interfaccia in cui vengono imposte le condizioni di continuità degli spostamenti e delle deformazioni :

$$\{u_{D_L}^k\} = \{u_{D_R}^k\}; \quad \{\mathcal{A}(\{u_{D_L}^k\})\} = \{\mathcal{A}(\{u_{D_R}^k\})\}. \quad (12)$$

La lunghezza della frattura virtuale deve essere tale che nessuna funzione di supporto contenga contemporaneamente l'apice della frattura reale e quello della frattura virtuale; in caso contrario si manifesterebbero discontinuità nel campo di spostamenti nella zona antistante la frattura virtuale. Ciò può essere ottenuto assumendo una lunghezza della frattura virtuale pari ad almeno due volte il raggio massimo dei supporti delle funzioni peso che la intersecano.

Le condizioni di interfaccia, eq. (12), vengono imposte aggiungendo al funzionale $\Pi(u)$, eq. (5), il termine

$$\int_{\Gamma_{VC}} [\text{ind}(\{u_{D_L}^k\} - \{u_{D_R}^k\}) + \text{ind}(\{\varepsilon_{D_L}^k\} - \{\varepsilon_{D_R}^k\})] dS, \quad (13)$$

la cui regolarizzazione lagrangiana aumentata è la seguente :

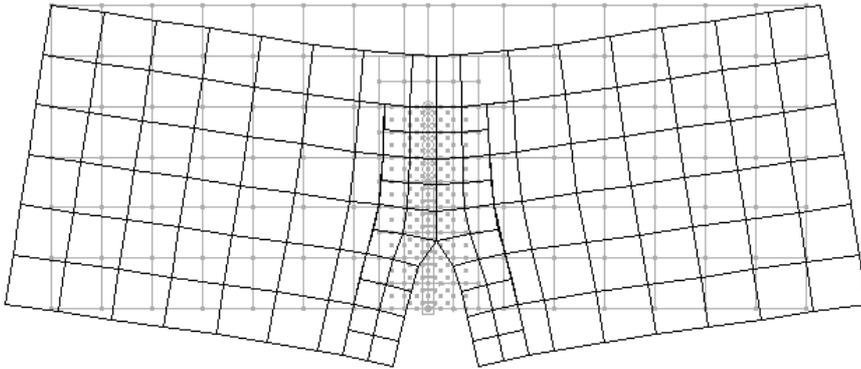
$$\begin{aligned} \max_{\{r_{VC}\}, \{\sigma_{VC}\}} & \{r_{VC}\}^T (\{u_{D_t}^k\} - \{u_{D_n}^k\}) + \frac{1}{2} \alpha (\{u_{D_t}^k\} - \{u_{D_n}^k\})^2 + \\ & + \{\sigma_{VC}\}^T (\{\varepsilon_{D_t}^k\} - \{\varepsilon_{D_n}^k\}) + \frac{1}{2} \alpha (\{\varepsilon_{D_t}^k\} - \{\varepsilon_{D_n}^k\})^2, \end{aligned} \quad (14)$$

essendo $\{r_{VC}\}, \{\sigma_{VC}\}$ i moltiplicatori lagrangiani associati alle condizioni di interfaccia lungo la frattura virtuale. Il principio variazionale per il solido fessurato è dunque :

$$\min_{\{u\}} \max_{\{r\}, \{r_{VC}\}, \{\sigma_{VC}\}} \Pi_{AL}(\{u\}, \{r\}, \{r_{VC}\}, \{\sigma_{VC}\}) \quad , (15)$$

e viene numericamente risolto attraverso l'iterazione lagrangiana aumentata, eq. (10).

Il modello è stato testato considerando una lastra rettangolare di dimensione finita (fig. 3), avente una fessura di bordo al centro del lato di lunghezza maggiore e soggetta ad uno stato di trazione uniforme lungo le facce di lunghezza minore.



Il metodo proposto ha consentito la determinazione del fattore di intensificazione degli sforzi con una precisione dell'1%, utilizzando una discretizzazione con 327 nodi MLSA, 126 celle di quadratura (4136 punti di Gauss) e mostrando la convergenza alla soluzione esatta al crescere della densità della discretizzazione. L'esempio è stato condotto utilizzando funzioni peso cubiche e come base di funzioni $\{1, x, y, \sqrt{r}\}$, essendo r la distanza dall'apice della fessura.

5. Conclusioni

E' stata presentata una nuova formulazione del tipo *mesh-free* basata sull'utilizzo dell'approssimazione MLS [1] e su un principio variazionale di tipo lagrangiano aumentato.

Tale formulazione consente l'imposizione delle condizioni al contorno essenziali e di ulteriori vincoli, quali condizioni di interfaccia, in maniera immediata e numericamente efficiente. Le sue proprietà sono state utilizzate per la definizione di un nuovo modello per la simulazione della discontinuità della frattura che evita la modificazione dei supporti delle funzioni peso mediante l'imposizione di condizioni di continuità lungo una "frattura virtuale".

Bibliografia

1. Belytshko, Y. Krongauz, D. Organ, M. Fleming, Meshless methods: an overview and recent developments, *Comp. Meth. Appl. Mech. Engrg.*, 139, 3-47 (1996).
2. Liszka and J. Orkisz, The finite difference method at arbitrary irregular grids and its application in applied mechanics, *Computers and Structures* 11, 83-95 (1980).
3. Belytschko, Y.Y. Lu and L. Gu, Element-free Galerkin methods, *Int. J. Numer. Meths. Eng.*, 37, 229-256 (1994).
4. Nayroles, G. Touzot and P. Villon, Generalizing the finite element method: diffuse approximation and diffuse elements. *Computational Mechanics* 10, 307-318 (1992).
5. Babuska and J.M. Melenk, The partition of unity method, *Int. J. Numer. Meths. Eng.*, 40, 727-758 (1997).
6. Duarte and J.T. Oden, Hp clouds – an hp meshless method, *Numerical Methods for Partial Differential Equations*, 1-34 (1996).
7. Lancaster and K. Salkauskas, Surfaces generated by moving least squares methods, *Mathematics of Computation* 37, 141-158 (1981).
8. Organ, M. Fleming, T. Terry, T. Belytschko, Continuous meshless approximations for nonconvex bodies by diffraction and transparency, *Comp. Mech.* 18, 1-11 (1996).
9. Ventura, Analisi di strutture non reagenti a trazione mediante il funzionale dell'energia complementare, *Tesi per il conseguimento del titolo di dottore di ricerca*, Università di Catania, 1995.
10. R. Hestenes, Multiplier and gradient methods, *Journal of Optimization Theory and Applications*, 4, 303-320 (1969).
11. J. D. Powell, A method for non-linear constraint in optimization problems, Optimization (Ed. R. Fletcher), 283-298, *Academic Press*, London (1969).
12. Lu, T. Belytschko and L. Gu, A new implementation of the element free Galerkin methods, *Comp. Meth. Appl. Mech. Engrg.*, 113, 397-414 (1994).
13. Cordes and B. Moran, Treatment of material discontinuity in the element free Galerkin method, *Comp. Meth. Appl. Mech. Engrg.*, 139, 75-89 (1996).

Atti del convegno

[[Precedente](#)] [[Successiva](#)]

Versione HTML realizzata da

