

# UN METODO PER L'ANALISI NUMERICA DI PANNELLI MURARI TRAMITE LA COMPLEMENTARITÀ LINEARE

Antonio Ercolano

*Dipartimento di Ingegneria Industriale, Università di Cassino  
Via G. Di Biasio 43-03043 Cassino (FR)*

**SOMMARIO:** In questo lavoro si presenta un metodo che riduce il problema del contatto con attrito alla Coulomb ad un problema di complementarità lineare. La particolarità del metodo risiede nella sua capacità di includere anche eventuali moti rigidi presenti nella struttura. In questo caso sono quindi compresi i pannelli in muratura costituiti da elementi blocchi ed elementi malta uniti fra loro solo dal legame di attrito alla Coulomb. Le ipotesi base sono quelle di materiale elastico lineare sia per i blocchi che la malta mentre la non linearità risiede soltanto tra le interfacce degli elementi. In ultimo si riporta un esempio numerico.

**PAROLE CHIAVE:** elementi finiti, muratura, complementarità lineare.

## INTRODUZIONE

In questo lavoro viene presentato un metodo per la risoluzione del problema del contatto con attrito alla Coulomb. Questo metodo, tenendo conto di eventuali moti rigidi presenti, si presta ad essere applicato a quelle strutture murarie pensate come assemblaggio di più elementi costruiti a secco o mediante interposizione di malta il cui equilibrio è assicurato dalla esistenza dell'attrito tra le interfacce. La matrice di rigidezza di questo modello, includendo tutti i moti rigidi di ogni singolo elemento, è infatti singolare. In genere le strutture murarie vengono distinte in due tipologie sia in funzione della grandezza dell'elemento unitario, il blocco, rispetto alla struttura intera che della più o meno regolare geometria di assemblaggio. Quando i blocchi hanno dimensioni rilevanti rispetto alla struttura nel suo complesso e pertanto non è riconoscibile una certa regolarità geometrica nella loro disposizione la struttura si definisce di tipo monumentale o "a blocchi". Nel caso opposto, cioè quando è riconoscibile, a causa delle piccole dimensioni relative dei blocchi, una loro disposizione ripetitiva la struttura, o il più delle volte una sua parte, viene definita come pannello murario. Molto spesso questo tipo di struttura viene affrontata con tecniche di omogeneizzazione. In ogni caso però una simulazione numerica agli elementi finiti che tenga conto singolarmente dei costituenti è sempre necessaria anche perchè è l'unico modo, oltre a quello strettamente sperimentale, di testare la bontà dei metodi di omogeneizzazione. In questo lavoro, dopo la presentazione del metodo, si riporterà un esempio numerico riguardante un pannello murario. Sia il blocco che la malta saranno discretizzati mediante elementi finiti. Le ipotesi sono le seguenti:

- spostamenti infinitesimi,
- elasticità lineare per i due costituenti blocchi e malta,
- attrito alla Coulomb tra malta e blocchi o tra blocchi se non esiste la malta.

In letteratura il problema del contatto viene risolto mediante riduzione ad un problema di complementarità lineare, (LCP), (Karlbirg, 1984) o mediante l'uso dei moltiplicatori di Lagrange o di una loro approssimazione: le funzioni di penalizzazione (Kikuchi e Oden,

1988). Un metodo che sembra prendere il meglio degli ultimi due è quello dei Lagrangiani aumentati (Alart e Curnier, 1991), (De Saxce e Feng, 1991), (Simo e Laursen, 1992), (Karlbring, 1992). Nel presente lavoro si fornisce una riduzione del problema del contatto con attrito alla Coulomb ad LCP generalizzando un metodo di Del Piero (Del Piero, 1990) valido per il caso di tensioni tangenziali note. Le condizioni di attrito vengono imposte seguendo lo schema descritto nel lavoro di Lee (Lee, 1994).

## IL PROBLEMA

Si assume che la muratura, formata da blocchi disposti con malta, presenti una ripetitività geometrica del tipo in fig.1.

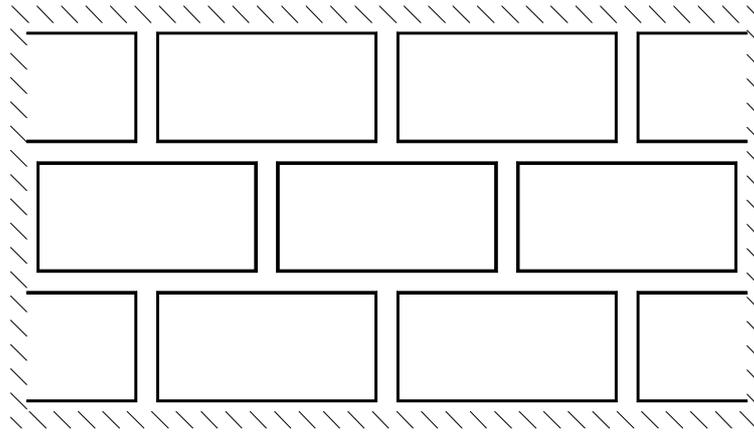


figura 1: tipologia del pannello murario

Le equazioni del problema elastico su di un continuo  $\Omega$  sono le ben note

$$\mathbf{D}\mathbf{u} = \boldsymbol{\varepsilon}, \quad \mathbf{C}\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\sigma}, \quad \text{div}\mathbf{T} + \mathbf{b} = \mathbf{0} \quad (1)$$

Come condizioni ai limiti abbiamo sia quelle standard del tipo

$$\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}} \quad \text{su } \partial\Omega^{\bar{\mathbf{u}}}, \quad \mathbf{t} = \bar{\mathbf{t}} \quad \text{su } \partial\Omega^{\bar{\mathbf{t}}} \quad (2)$$

dove  $\partial\Omega^{\bar{\mathbf{u}}}$  e  $\partial\Omega^{\bar{\mathbf{t}}}$  sono parti della frontiera  $\partial\Omega$  che quelle dovute alle condizioni di contatto. Queste sono generalmente di due tipi ed esprimono il contatto di una parte della frontiera con un ostacolo esterno o con un'altra parte della frontiera stessa. In ogni caso esistono due superfici  $\partial\Omega_a^c$  e  $\partial\Omega_b^c$  che possono venire in contatto e quindi coppie di punti di queste superfici di coordinate finali  $\mathbf{y}_a$  ed  $\mathbf{y}_b$  che devono verificare le condizioni di contatto. Se con il vettore  $\mathbf{x}$  denotiamo la configurazione iniziale e con  $\mathbf{u}$  lo spostamento, la distanza finale  $\Delta\mathbf{y}$  tra le due generiche superfici espresse in una terna locale  $n, t$  con  $n$  normale alle superfici stesse sarà:

$$\mathbf{y}_a + \Delta\mathbf{y} = \mathbf{y}_b, \quad \text{con } \Delta\mathbf{y} \cdot \mathbf{n} \geq \mathbf{0} \quad (3)$$

Esplicitando gli spostamenti in forma scalare secondo le due direzioni la (3) porge

$$\begin{aligned} \Delta y_n &= \Delta x_n + \Delta u_n \geq 0 \\ \Delta y_t &= \Delta u_t \end{aligned} \quad (4)$$

Le condizioni di compatibilità degli spostamenti unite a quelle sulle tensioni in base alle ipotesi di attrito alla Coulomb diventano:

$$\text{condizioni lungo la normale: } \left\{ \begin{array}{l} \Delta y_n \geq 0, \quad t_n \geq 0, \quad \Delta y_n t_n = 0 \end{array} \right. \quad (5)$$

$$\text{condizioni lungo la tangente: } \left\{ \begin{array}{l} -\mu t_n \leq t_t \leq \mu t_n \\ \Delta y_t = 0 \quad \text{se} \quad -\mu t_n < t_t < \mu t_n \\ \Delta y_t \geq 0 \quad \text{se} \quad t_t = \mu t_n \\ \Delta y_t \leq 0 \quad \text{se} \quad t_t = -\mu t_n \end{array} \right. \quad (6)$$

L'energia dissipata è fornita ovviamente dalla

$$t_t \Delta y_t \geq 0 \quad (7)$$

I campi rispettivamente delle tensioni superficiali e degli spostamenti, compatibili con le condizioni normali, sono

$$\mathbf{K}_n^T = \left\{ \mathbf{t}_n \in U_{\partial\Omega^c}^{n'} : \mathbf{t}_n \cdot \mathbf{n} = t_n \geq 0 \text{ su } \partial\Omega^c \right\} \quad (8)$$

$$\mathbf{K}_n^U = \left\{ \mathbf{u} \in \mathbf{U} : \Delta y_n = \Delta x_n + \Delta u_n \geq 0 \text{ su } \partial\Omega^c \right\} \quad (9)$$

dove il campo di spostamenti  $\mathbf{U}$  si è supposto soddisfare le relative condizioni ai limiti in (2) e  $U_{\partial\Omega^c}^{n'}$  è lo spazio duale degli spostamenti sulla frontiera. Le condizioni del tipo (5) (Klarbring, 1984) sono equivalenti alla

$$\Delta y_n (t_n^* - t_n) \geq 0, \quad t_n \in \mathbf{K}_n^T, \forall t_n^* \in \mathbf{K}_n^T \quad (10)$$

dove  $\mathbf{K}_n^T = \{t_n : t_n \geq 0\}$ . La (10) definisce una polarità tra i convessi  $\mathbf{K}_n^T$  e  $\mathbf{K}_n^U$ . Le condizioni di attrito in (6) invece possono essere trasformate nella

$$\Delta y_t (t_t - t_t^*) \geq 0, \quad t_t \in \mathbf{K}_t^T(t_n), \forall t_t^* \in \mathbf{K}_t^T(t_n) \quad (11)$$

dove  $\mathbf{K}_t^T(t_n) = \{t_t : |t_t| \leq \mu |t_n|\}$ . Purtroppo,  $\mathbf{K}_t^T(t_n)$  dipende dalla tensione  $t_n$  la quale ovviamente dipende dalla intensità dei carichi e quindi, in ultima analisi, dal percorso di carico. Il problema deve essere quindi affrontato in via incrementale.

## FORMULAZIONE AGLI ELEMENTI FINITI

Le equazioni variazionali di equilibrio in dimensione finita porgono il sistema di equazioni

$$\mathbf{K}\mathbf{u} + \mathbf{C}_n^T \mathbf{t}_n + \mathbf{C}_t^T \mathbf{t}_t + \mathbf{f} = \mathbf{0} \quad (12)$$

Le forme discretizzate delle condizioni di contatto (5) e (6) sono

$$\begin{cases} -\mathbf{C}_n \mathbf{u} + \Delta \mathbf{y}_n = \Delta \mathbf{x}_n \\ \Delta \mathbf{y}_n \geq \mathbf{0} \quad \mathbf{t}_n \geq \mathbf{0} \quad \mathbf{t}_n \cdot \Delta \mathbf{y}_n = \mathbf{0} \end{cases} \quad (13)$$

$$\begin{cases} -\mu \mathbf{t}_n \leq \mathbf{t}_t \leq \mu \mathbf{t}_n \\ \Delta \mathbf{y}_t = 0 & \text{se } -\mu \mathbf{t}_n < \mathbf{t}_t < \mu \mathbf{t}_n \\ \Delta \mathbf{y}_t \geq 0 & \text{se } \mathbf{t}_t = \mu \mathbf{t}_n \\ \Delta \mathbf{y}_t \leq 0 & \text{se } \mathbf{t}_t = -\mu \mathbf{t}_n \end{cases} \quad (14)$$

dove

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{y}_n &= (\mathbf{u}_{bn} - \mathbf{u}_{an}) + \Delta \mathbf{x}_n = \Delta \mathbf{u}_n + \Delta \mathbf{x}_n \\ \Delta \mathbf{y}_t &= \mathbf{u}_{bt} - \mathbf{u}_{at} = \Delta \mathbf{u}_t \end{aligned} \quad (15)$$

In (15) i vettori  $\mathbf{u}_b = (\mathbf{u}_{bn}, \mathbf{u}_{bt})^T$  e  $\mathbf{u}_a = (\mathbf{u}_{an}, \mathbf{u}_{at})^T$  rappresentano gli spostamenti delle coppie di nodi che possono venire in contatto. Ovviamente gli spostamenti nodali sono già letti nei riferimenti locali  $(n, t)$  con  $n$  normale all'area di contatto.

Mediante le seguenti relazioni e le loro inverse si introducono due variabili  $\Delta \mathbf{t}_t^+$  e  $\Delta \mathbf{t}_t^-$ , utili nel seguito

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{t}_t^+ &= \mu \mathbf{t}_n + \mathbf{t}_t & \mathbf{t}_n &= (\Delta \mathbf{t}_t^+ + \Delta \mathbf{t}_t^-) / 2\mu \\ \Delta \mathbf{t}_t^- &= \mu \mathbf{t}_n - \mathbf{t}_t & \mathbf{t}_t &= (\Delta \mathbf{t}_t^+ - \Delta \mathbf{t}_t^-) / 2 \end{aligned} \quad (16)$$

le condizioni di equilibrio (12) e di vincolo (13) e (14) possono esprimersi nella forma:

$$\mathbf{K} \mathbf{u} + \mathbf{C}_n^T \mathbf{t}_n + \frac{1}{2} \mathbf{C}_t^T (\Delta \mathbf{t}_t^+ - \Delta \mathbf{t}_t^-) + \mathbf{f} = \mathbf{0} \quad (17)$$

$$\begin{cases} -\mathbf{C}_n \mathbf{u} + \Delta \mathbf{y}_n = \Delta \mathbf{x}_n \\ \mathbf{t}_n \geq \mathbf{0}, \Delta \mathbf{y}_n \geq \mathbf{0}, \quad \mathbf{t}_n \cdot \Delta \mathbf{y}_n = \mathbf{0} \\ \Delta \mathbf{t}_t^+ \geq \mathbf{0}, \Delta \mathbf{y}_t^+ \geq \mathbf{0}, \quad \Delta \mathbf{y}_t^+ \cdot \Delta \mathbf{t}_t^+ = \mathbf{0} \\ \Delta \mathbf{t}_t^- \geq \mathbf{0}, \Delta \mathbf{y}_t^- \geq \mathbf{0}, \quad \Delta \mathbf{y}_t^- \cdot \Delta \mathbf{t}_t^- = \mathbf{0} \end{cases} \quad (18)$$

dove  $\Delta \mathbf{y}_t^+$  e  $\Delta \mathbf{y}_t^-$  sono le parti non negative della proiezione:

$\Delta \mathbf{y}_t = \frac{1}{2} [|\Delta \mathbf{y}_t| + \Delta \mathbf{y}_t] - \frac{1}{2} [|\Delta \mathbf{y}_t| - \Delta \mathbf{y}_t] = \Delta \mathbf{y}_t^+ - \Delta \mathbf{y}_t^-$ . Le (17) e (18) possono in fine porsi nella forma di complementarità lineare non standard

$$\begin{vmatrix} \mathbf{0} \\ \Delta \mathbf{y} \end{vmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K} & \bar{\mathbf{C}}^T \\ \bar{\mathbf{C}} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{vmatrix} \mathbf{u} \\ \bar{\mathbf{t}} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\mathbf{f} \\ \Delta \mathbf{x}_0 \end{vmatrix} \quad (19)$$

$$\bar{\mathbf{t}} \geq \mathbf{0}, \quad \bar{\Delta \mathbf{y}} \geq \mathbf{0}, \quad \bar{\mathbf{t}} \cdot \bar{\Delta \mathbf{y}} = \mathbf{0} \quad (20)$$

dove:

$$\bar{\mathbf{C}} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_n \\ \mathbf{C}_t / 2 \\ -\mathbf{C}_t / 2 \end{bmatrix}, \quad \bar{\mathbf{t}} = \begin{bmatrix} \mathbf{t}_n \\ \Delta \mathbf{t}_t^+ \\ \Delta \mathbf{t}_t^- \end{bmatrix}, \quad \bar{\Delta \mathbf{y}} = \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{y}_n \\ \Delta \mathbf{y}_t^+ \\ \Delta \mathbf{y}_t^- \end{bmatrix}, \quad \Delta \mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{x}_n \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (21)$$

### LA RIDUZIONE AD LCP

Le (19) e (20) costituiscono un sistema in cui compare l'intero vettore degli spostamenti  $\mathbf{u}$  mentre è solo  $\bar{\Delta \mathbf{y}}$  ad essere in complementarità con il rispettivo set delle reazioni  $\bar{\mathbf{t}}$ . Le restrizioni su  $\bar{\Delta \mathbf{y}}$  si trasferiscono agevolmente su  $\bar{\Delta \mathbf{u}}$  tramite le relazioni

$$\bar{\Delta \mathbf{u}} = \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{u}_n \\ \Delta \mathbf{u}_t^+ \\ \Delta \mathbf{u}_t^- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{y}_n - \Delta \mathbf{x}_n \\ \Delta \mathbf{y}_t^+ \\ \Delta \mathbf{y}_t^- \end{bmatrix} \quad (22)$$

Il problema viene quindi rimandato ad una scrittura delle equazioni di equilibrio in cui compaiano solo le  $\bar{\Delta \mathbf{u}}$ . In realtà ogni problema di minimo di una forma quadratica soggetta a condizioni di vincolo lineari può porsi nella forma data dalle (19) e (20). In altri termini le suddette relazioni rappresentano le condizioni di Karush, Kuhn e Tucker di un problema di minimo vincolato. Nel caso in cui la matrice dell'equilibrio elastico  $\mathbf{K}$  sia definita positiva è possibile (Karlbirg, 1984) estrarre algebricamente dalla (19) un set di equazioni che esprimano l'equilibrio tra coppie di nodi sia in direzione normale che tangenziale lungo la frontiera di contatto. In altri termini è possibile giungere ad una scrittura delle equazioni di equilibrio del tipo:

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{K}}_{11} \bar{\Delta \mathbf{u}}_n + \bar{\mathbf{K}}_{12} \bar{\Delta \mathbf{u}}_t + \mathbf{t}_n &= -\mathbf{f}_n \\ \bar{\mathbf{K}}_{21} \bar{\Delta \mathbf{u}}_n + \bar{\mathbf{K}}_{22} \bar{\Delta \mathbf{u}}_t + \mathbf{t}_t &= -\mathbf{f}_t \end{aligned} \quad (23)$$

Le (23) e le relazioni inverse in (16) porgono

$$\begin{bmatrix} \bar{\mathbf{K}}_{11} & \bar{\mathbf{K}}_{12} & -\bar{\mathbf{K}}_{12} \\ -\bar{\mathbf{K}}_{21} & \bar{\mathbf{K}}_{22} & -\bar{\mathbf{K}}_{22} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{y}_n \\ \Delta \mathbf{y}_t^+ \\ \Delta \mathbf{y}_t^- \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 2\mathbf{I} & -2\mathbf{I} \\ 2\mu\mathbf{I} & \mathbf{I} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{t}_n \\ \Delta \mathbf{t}_t^+ \\ \Delta \mathbf{t}_t^- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mathbf{f}_n + \bar{\mathbf{K}}_{11} \Delta \mathbf{x}_n \\ -\mathbf{f}_t + \bar{\mathbf{K}}_{21} \Delta \mathbf{x}_n \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (24)$$

e quindi con le ovvie posizioni si perviene alla:

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{K}} \bar{\Delta \mathbf{y}} + \mathbf{B} \bar{\mathbf{t}} &= -\bar{\mathbf{f}} \\ \bar{\Delta \mathbf{y}} \geq \mathbf{0}, \quad \bar{\mathbf{t}} \geq \mathbf{0}, \quad \bar{\Delta \mathbf{y}} \cdot \bar{\mathbf{t}} &= \mathbf{0} \end{aligned} \quad (25)$$

Nel caso che si vuole esaminare, le nostre ipotesi portano alla creazione di una matrice di rigidità  $\mathbf{K}$  semidefinita positiva per cui non è più possibile usare il metodo innanzi descritto. In (Stavroulakis et alii, 1991) viene proposto un metodo che, mediante un approccio agli spostamenti, sotto l'ipotesi di tensioni tangenziali note ed in presenza di moti rigidi, si riconduce ad un LCP. In un successivo lavoro (Lee, 1994), mediante questa volta un approccio basato sul metodo delle forze, viene incluso anche l'attrito alla Coulomb. I due lavori presentano un aspetto in comune. Entrambi tengono conto dei moti rigidi introducendo per ogni corpo libero una terna di riferimento locale cosicché ogni spostamento è la somma di un vettore locale più lo spostamento di tipo rigido subito dalla terna solidale al corpo libero. Ovviamente lo spostamento rigido non è di per se limitato in segno per cui la riduzione ad un problema di complementarità lineare avviene mediante l'introduzione delle due parti positive e negative delle componenti dello spostamento rigido. In maniera duale, le equazioni di equilibrio vengono viste come coppie di disequazioni in modo da riavere un problema di LCP. Il prezzo da pagare per questo approccio è notevolmente alto in quanto si è costretti ad introdurre le proiezioni positive e negative di ogni componente del moto rigido. Ad esempio, nel caso piano occorre introdurre sei parametri per ogni corpo libero presente nella struttura. In un lavoro di Del Piero (Del Piero, 1990), è stato presentato un metodo diverso che evita l'introduzione di questi parametri. Nel presente lavoro si intende in pratica estendere questo metodo al caso di presenza di attrito alla Coulomb. Non introducendo terne locali di spostamento si ottiene una sensibile riduzione delle dimensioni del problema.

Supponiamo che il contatto avvenga tramite  $m$  coppie di nodi. In altri termini le due coppie di vettori  $(\mathbf{t}_n, \mathbf{t}_t)$  e  $(\Delta\mathbf{y}_n, \Delta\mathbf{y}_t)$  descrivono sia lo stato tensionale che le distanze tra  $m$  nodi. Le tensioni si suppongono in equilibrio con le forze applicate  $(\mathbf{b}_{0n}, \mathbf{b}_{0t})$ . Una configurazione della struttura sia definita da  $i$  parametri. Supponiamo che questi siano gli ultimi  $i$  parametri:  $\Delta\mathbf{y}_n^{m-i+1}, \dots, \Delta\mathbf{y}_n^m$  coinvolti nelle condizioni di congruenza lungo  $n$ . Se ad esempio  $r$  sono i corpi liberi nella struttura sarà:  $i = 3 \times r$ . Il vettore  $\Delta\mathbf{y}_n$  può quindi essere decomposto in  $\Delta\mathbf{y}_n^{m-i}$  e  $\Delta\mathbf{y}_n^i$ . A questo punto, secondo il classico metodo delle forze, la configurazione finale sarà data da un moto rigido definito dagli  $\Delta\mathbf{y}_n^i$  più le deformate elastiche definite dalle forze  $\mathbf{t}_n^{m-i}, \mathbf{t}_t^m, \mathbf{b}_{0n}$  e  $\mathbf{b}_{0t}$ . Le forze  $\mathbf{t}_n^i$ , che sono le variabili duali delle  $\Delta\mathbf{y}_n^i$  vengono ottenute semplicemente tramite le equazioni di equilibrio:

$$\mathbf{R}_n \mathbf{t}_n^{m-i} + \mathbf{R}_t \mathbf{t}_t^m + \mathbf{t}_{no}^i = \mathbf{t}_n^i \quad (26)$$

Andiamo ora ad esplicitare ulteriormente le (15)

$$\begin{aligned} \Delta\mathbf{y}_n^{m-i} &= \Delta\mathbf{x}_{on}^{m-i} + \Delta\mathbf{u}_{en}^{m-i} + \Delta\mathbf{u}_{Rn}^{m-i} + \Delta\mathbf{u}_{on}^{m-i} \\ \Delta\mathbf{y}_n^i &= \Delta\mathbf{u}_n^i + \Delta\mathbf{x}_{on}^i \\ \Delta\mathbf{y}_t^m &= \Delta\mathbf{u}_{et}^m + \Delta\mathbf{u}_{Rt}^m + \Delta\mathbf{u}_{ot}^m \end{aligned} \quad (27)$$

In (27)  $\Delta \mathbf{u}_{en}^{m-i}$  e  $\Delta \mathbf{u}_{et}^m$  denotano gli spostamenti di tipo elastico causati da  $\mathbf{t}_n^{m-i}, \mathbf{t}_t^m$ ,  $\Delta \mathbf{u}_{Rn}^{m-i}$  e  $\Delta \mathbf{u}_{Rt}^m$  sono gli spostamenti relativi da moto rigido causati da  $\Delta \mathbf{u}_n^i$ , mentre  $\Delta \mathbf{x}_{on}^{m-i}$  e  $\Delta \mathbf{x}_{ot}^i$  rappresentano la distanza iniziale o gap. In ultimo  $\Delta \mathbf{u}_{on}^{m-i}$  e  $\Delta \mathbf{u}_{ot}^m$  sono gli spostamenti relativi elastici dovuti ai carichi  $\mathbf{b}_{on}$  e  $\mathbf{b}_{ot}$ . Notare che il vettore  $\Delta \mathbf{y}_n^i$  rimane invariato. Dal primo e terzo rigo della (27) possiamo ricavare le  $(m-i)$  condizioni di compatibilità lungo le direzioni  $n$  e le  $m$  condizioni di compatibilità lungo  $t$

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{n,n} \mathbf{t}_n^{m-i} + \mathbf{A}_{n,t} \mathbf{t}_t^m - \mathbf{R}_n^T \Delta \mathbf{u}_n^i + \Delta \mathbf{u}_{on}^{m-i} + \Delta \mathbf{y}_n^{m-i} &= \Delta \mathbf{x}_{on}^{m-i} \\ \mathbf{A}_{t,n} \mathbf{t}_n^{m-i} + \mathbf{A}_{t,t} \mathbf{t}_t^m - \mathbf{R}_t^T \Delta \mathbf{u}_n^i + \Delta \mathbf{u}_{ot}^{m-i} + \Delta \mathbf{y}_t^{m-i} &= \Delta \mathbf{x}_{ot}^{m-i} \end{aligned} \quad (28)$$

Sostituendo poi il valore di  $\Delta \mathbf{y}_n^i$  dalla seconda delle (27), la (28) diventa

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{n,n} \mathbf{t}_n^{m-i} + \mathbf{A}_{n,t} \mathbf{t}_t^m - \mathbf{R}_n^T \Delta \mathbf{y}_n^i + \Delta \mathbf{u}_{on}^{m-i} + \Delta \mathbf{y}_n^{m-i} &= \Delta \mathbf{x}_{on}^{m-i} + \mathbf{R}_n^T \Delta \mathbf{x}_n^i \\ \mathbf{A}_{t,n} \mathbf{t}_n^{m-i} + \mathbf{A}_{t,t} \mathbf{t}_t^m - \mathbf{R}_t^T \Delta \mathbf{y}_n^i + \Delta \mathbf{u}_{ot}^{m-i} + \Delta \mathbf{y}_t^{m-i} &= \Delta \mathbf{x}_{ot}^{m-i} + \mathbf{R}_t^T \Delta \mathbf{x}_n^i \end{aligned} \quad (29)$$

La prima delle relazioni inverse in (16) può scriversi

$$2\mu \mathbf{I}_E \mathbf{t}_n^{m-i} + 2\mu \mathbf{I}_R \mathbf{t}_n^i + \Delta \mathbf{t}_t^+ + \Delta \mathbf{t}_t^- = \mathbf{0} \quad (30)$$

dove

$$\mathbf{I}_E = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{(m-i, m-i)} \\ \mathbf{0}_{(i, m-i)} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{I}_R = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{(m-i, i)} \\ \mathbf{I}_{(i, i)} \end{bmatrix} \quad (31)$$

A questo punto la riduzione è completata. Infatti il sistema delle (26), (29) e (30), sostituendo il valore di  $\mathbf{t}_t$  ricavato dall'ultima equazione in (16) può scriversi

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_{n,n} & \mathbf{0} & \frac{1}{2} \mathbf{A}_{n,t} & -\frac{1}{2} \mathbf{A}_{n,t} \\ -\mathbf{R}_n & \mathbf{I} & \frac{1}{2} \mathbf{R}_t & -\frac{1}{2} \mathbf{R}_t \\ \mathbf{A}_{t,n} & \mathbf{0} & \frac{1}{2} \mathbf{A}_{t,t} & -\frac{1}{2} \mathbf{A}_{t,t} \\ 2\mu \mathbf{I} & 2\mu \mathbf{I} & \mathbf{I} & -\mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{t}_n^{m-i} \\ \mathbf{t}_n^i \\ \Delta \mathbf{t}_t^+ \\ \Delta \mathbf{t}_t^- \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{R}_n^T & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{R}_t^T & \mathbf{I} & -\mathbf{I} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{y}_n^{m-i} \\ \Delta \mathbf{y}_n^i \\ \Delta \mathbf{y}_t^+ \\ \Delta \mathbf{y}_t^- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{x}_{on}^{m-i} - \Delta \mathbf{u}_{on}^{m-i} + \mathbf{R}_n^T \Delta \mathbf{x}_n^i \\ \mathbf{t}_n^i \\ -\Delta \mathbf{u}_{ot}^{m-i} \Delta \mathbf{x}_{ot}^{m-i} + \mathbf{R}_t^T \Delta \mathbf{x}_n^i \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (32)$$

La (32), tenendo conto delle disequazioni in (18), dopo le ovvie posizioni, conduce al problema di complementarità lineare generalizzato

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \mathbf{t} + \mathbf{B} \Delta \mathbf{y} &= \mathbf{c} \\ \mathbf{t} \geq \mathbf{0}, \quad \Delta \mathbf{y} \geq \mathbf{0}, \quad \mathbf{t} \cdot \Delta \mathbf{y} &= 0 \end{aligned} \quad (33)$$

Il problema descritto dalle (33) è detto generalizzato in quanto il problema standard si ha per  $\mathbf{B} = \mathbf{I}$ . In ogni caso la soluzione è perseguibile tramite il metodo della bimatrice di Lemke (Stavroulakis *et Alii*, 1991), (Cottle *et Alii*, 1992), (Lee, 1994). Le condizioni per il buon posizionamento del problema sono simili a quelle valide per il caso in cui manca

l'attrito e che sono state discusse da Del Piero (Del Piero, 1990). Una condizione sufficiente per l'unicità della soluzione è pertanto l'esistenza di una combinazione lineare positiva per le tensioni  $\mathbf{t}_n^{m-i}, \mathbf{t}_n^i$  che soddisfino l'equilibrio in (26) con  $\mathbf{t}_t^m = \mathbf{0}$ .

### UNA APPLICAZIONE NUMERICA

Di seguito viene riportato il caso di un pannello caricato in sommità con un carico ripartito e posto tra due elementi verticali indeformabili in modo da far evidenziare l'effetto arco. Si sono discretizzati i films di malta mediante un elemento lineare a quattro nodi del tipo tratteggiato in fig.2

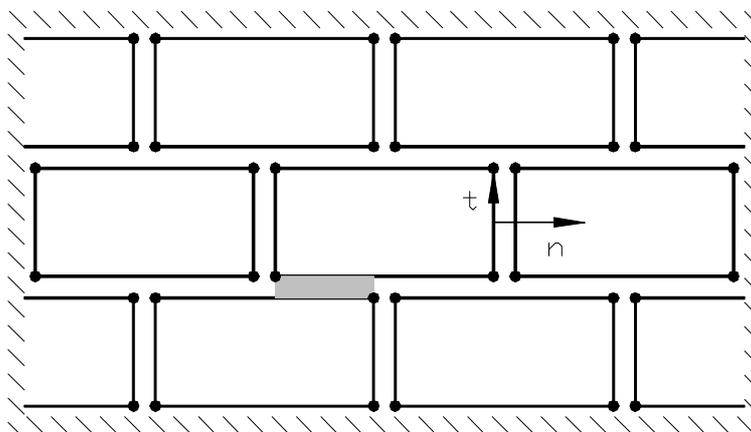


figura 2: la discretizzazione

Il pannello, fig.3, è spesso 0.10 m. ed è in condizioni di stato tensionale piano. Le dimensioni dei blocchi sono rispettivamente 0.2m e 0.1m, disposti con uno spessore di malta di 0.02m.

Sono stati scelti, sia per i blocchi che per la malta, gli stessi parametri costitutivi e cioè un modulo di Young,  $E_y$ , pari a 100.000 KN/m<sup>2</sup> ed un coefficiente di Poisson  $\nu$  pari a 0.15. Il pannello è disposto tra due ostacoli rigidi verticali e caricato superiormente con un carico distribuito pari a 10 KN/m<sup>2</sup>. Il coefficiente di attrito  $\mu$  è stato scelto pari ad 1. Nella figura 3 sono state riportate, per ogni blocco, le due tensioni principali medie rendendo così evidente l'effetto arco creatosi.

### CONCLUSIONI

Nel lavoro viene presentato un metodo per la riduzione del problema di contatto con attrito alla Coulomb in presenza di moti rigidi, ad un problema di complementarità lineare. Questo rende il metodo particolarmente utile nello studio delle strutture murarie composte da blocchi e malta sotto l'ipotesi di contatto unilatero con attrito alla Coulomb tra i costituenti. L'applicazione numerica riportata conferma l'efficienza del metodo proposto.

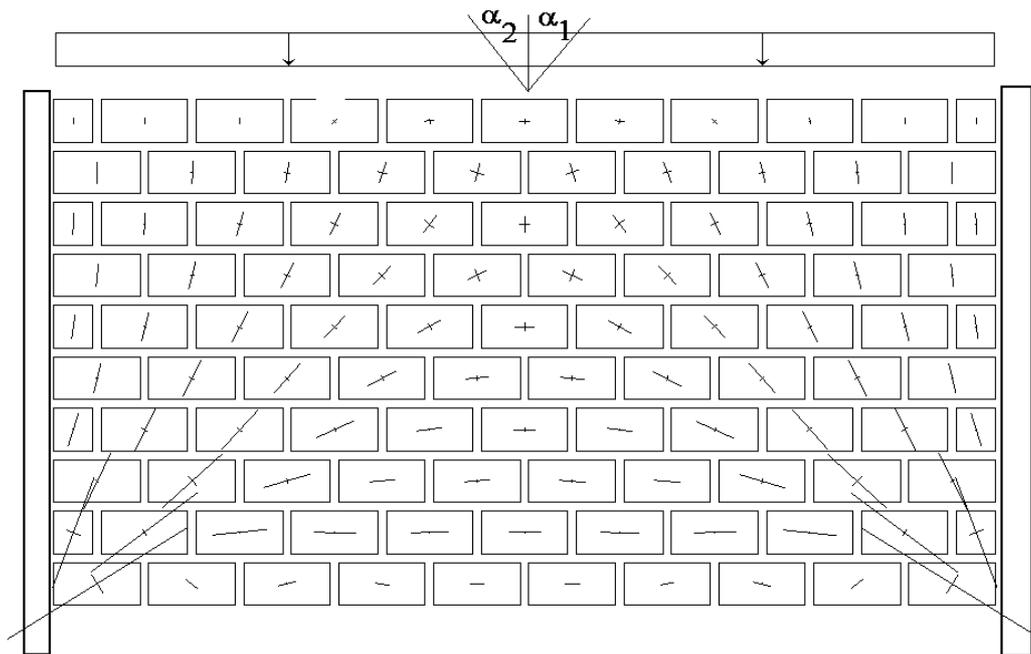


figura 3: l'effetto arco

### BIBLIOGRAFIA

Alart, P., Curnier, A. 1991, "A mixed formulation for frictional contact problems prone to Newton like solution methods", *Comp. Meths. Appl. Mech. Engng.*, vol.92, 353-375.

Cottle R.W., Pang J.S., Stone R.E., 1992, "The Linear Complementarity Problem", Academic Press.

Del Piero G.,1990, "Resolution methods for framed structures with unilateral constraints", (in Italiano), IMTA, Institute of Theoretical and Applied Mechanics, University of Udine, Italy.

De Saxce, G., Feng, Z.Q., 1991, "New inequality and functional for contact with friction: the implicit standard material approach". *Mech. Struct. & Mach*", vol.19, 3, 301-325.

Lee Seok-Soon, 1994, "A computational method for frictional contact problem using finite element method". "Inter. J. Num. Methods Eng", vol. 37, 217-228.

Kikuchi, N., Oden, J.T., 1988, "Contact problems in elasticity", SIAM, Philadelphia.

Klarbring. A.,1984",Contact problems with friction", Thesis, Linkoping Institute of Technology, Linkoping, Sweden.

Klarbring. A., 1992, "Mathematical programming and augmented lagrangian methods for frictional contact problems", *Contact Mechanics Int. Symposium*, Switzerland.

Simo, J.C., Laursen, T.A., 1992, "An augmented lagrangian treatment of contact problems involving friction", *Computers & Structures*, vol. 42, 97-116.

Stavroulakis G.E., Panagiotopoulos P.D. and Al-Fahed A.M., 1991,"On the rigid body displacements and rotations in unilateral contact problems and applications", *Computers & Structures* vol. 40, No. 3, 599-614.