

SUL POSTPROCESSING DI DATI SPERIMENTALI OTTENUTI DA COMPONENTI CRICCATI

Ciavarella M. , Demelio G. , Pappalettere C.

*Dipartimento di Progettazione e Produzione Industriale
Politecnico di Bari
Viale Japigia 182 - 70126 Bari*

SOMMARIO: In questo lavoro è discussa l'applicazione della tecnica *Singular Value Decomposition* (SVD) al problema della collocazione di un set di dati simulante i tipici risultati di analisi sperimentali condotte su componenti criccati. L'approccio sfrutta l'espansione completa di Williams per l'intero campo di spostamenti o di tensioni, che è disponibile oltre che per il caso di materiale isotropo linearmente elastico, anche in casi più generali, quali cricche di interfaccia, materiali anisotropi, cricche che si propagano in condizione steady state o di transitorio. Il lavoro si articola in una prima parte relativa all'analisi di convergenza e di stima dell'accuratezza dei risultati, effettuata per un caso in cui è disponibile la soluzione analitica, ed in una seconda parte di tipo applicativo, in cui sono considerati set di dati tipici di rilievi estensimetrici, caratterizzati da informazioni in punti e direzioni prefissate, oppure set di dati derivanti da tecniche sperimentali di tipo full field.

PAROLE CHIAVE: Collocazione, SVD, espansione di Williams, *T-Stress*

INTRODUZIONE

Quando si riscontra la presenza di una cricca su di una struttura o su di un componente meccanico, si vorrebbero avere in tempi ragionevolmente brevi informazioni riguardo il fattore di sicurezza residuo alla propagazione instabile e alla presumibile evoluzione del difetto nel tempo. Tali informazioni richiedono la valutazione dei fattori di intensità degli sforzi K_I e K_{II} , che può essere effettuata per mezzo di tecniche numeriche oppure sperimentali. Se si dispone di un modello numerico ad elementi finiti oppure ad elementi di contorno del componente, lo studio dei fattori di intensità degli sforzi può essere condotto quando, per la geometria in esame, è nota la funzione peso appropriata. Spesso è richiesta comunque un'integrazione con dati di tipo sperimentale perché l'affidabilità del modello numerico può essere insufficiente a causa di una discretizzazione carente nella geometria o nella conoscenza del materiale, di eventuali difformità costruttive rispetto al progetto originario oppure per la presenza di carichi accidentali o effetti dinamici imprevisti

Lo studio di quale sia la tecnica sperimentale più appropriata esula dalla problematica qui trattata, ma qualunque sia l'informazione da essa fornita, spostamenti, deformazioni, tensioni, combinazioni di vario tipo delle tensioni o delle deformazioni, sorgono alcuni interrogativi preliminari:

1) Qual è l'estensione della zona di campo asintotico della cricca?

2) Quante misurazioni effettuare ?

3) Come sfruttare al meglio i dati sperimentali ed in particolare le informazioni che si hanno per la zona di campo non asintotica?

4) Qual è l'affidabilità dei risultati ottenuti nella valutazione dei parametri di campo?

Una possibilità è offerta dal considerare il campo deformativo e tensionale della cricca non solo nella sua parte asintotica e singolare ma anche nei contributi dei termini cosiddetti "regolari" che sommati ai precedenti sono in grado di fornire una buona ricostruzione del campo anche in corrispondenza di zone relativamente lontane dall'apice della cricca. Oltretutto si avrebbero a disposizione altre informazioni, quali ad esempio il cosiddetto *T-stress*, che rappresenta l'unico termine regolare in grado di dare contributo tensionale all'apice della cricca e assume notevole importanza nei fenomeni di plasticizzazione ed è utilizzato nei criteri di frattura multitermine o nei problemi di propagazione dinamica. L'applicazione immediata cui si presta l'espansione completa del campo deformativo o tensionale è quella che può essere effettuata per mezzo di una tecnica di collocazione: se sono noti, come condizioni al contorno, come risultati numerici o come risultati sperimentali alcune informazioni di carattere deformativo o tensionale in particolari punti, è possibile scegliere un numero limitato di termini dell'espansione e scrivere in funzione di coefficienti incogniti un set di equazioni lineari. Questa tecnica applicata in modo semplicistico introduce degli elementi tali da rendere i risultati inaffidabili, poiché la scelta di un numero limitato di termini dell'espansione risulta piuttosto arbitraria e la posizione dei punti di collocazione non può essere a priori ottimizzata per una operazione di collocazione. In questo lavoro si mostra come sia possibile utilizzare in modo ottimale i dati a disposizione per mezzo della classica tecnica *Singular Value Decomposition* (SVD) ottenendo risultati affidabili per i coefficienti dell'espansione ed in particolare per i primi tre termini che rappresentano il K_I , il K_{II} ed il *T-stress*. Si mostra inoltre qual è, in casi realistici, il numero minimo di dati e di termini dell'espansione in grado di garantire un livello di precisione ingegneristicamente accettabile.

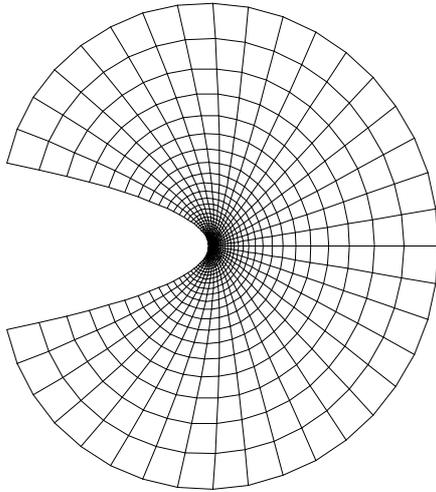
ESPANSIONE COMPLETA DEL CAMPO

L'espansione completa del campo di tensioni e di spostamento è stata fornita da Deng (Deng, 1993) e si riferisce al caso più generale di propagazione a regime di una cricca di interfaccia fra materiali anisotropi ed elasticamente dissimili. Qui si riportano, in forma concisa, le relazioni che esprimono l'espansione completa relativa ad una cricca in un materiale omogeneo elastico, rimandando al lavoro citato per le espressioni complete:

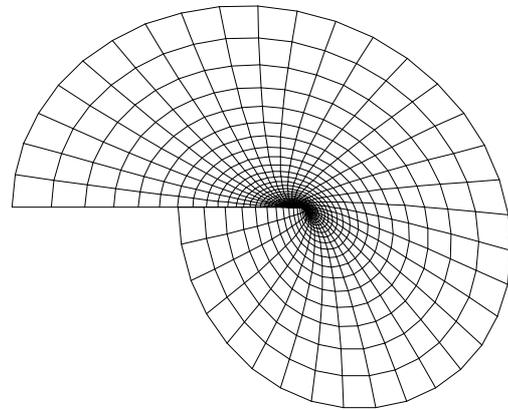
$$\begin{aligned}
 s(r,q) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r^{\frac{n-1}{2}}}{\sqrt{2p}} \{ K_n^I s_n^I(q) + K_n^{II} s_n^{II}(q) \} \\
 \mathbf{u}(r,q) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r^{\frac{n+1}{2}}}{\sqrt{2p}} \{ K_n^I \mathbf{u}_n^I(q) + K_n^{II} \mathbf{u}_n^{II}(q) \}
 \end{aligned}
 \tag{1}$$

r è la distanza dall'apice della cricca, K_n^I e K_n^{II} rappresentano i coefficienti dell'espansione, che per $n=0$ coincidono con i con i fattori di intensificazione degli sforzi relativi al modo *I* e al modo *II*, $s(r,q)$ è la generica componente tensionale, $s_n^I(q)$ e

$\sigma_n^{II}(\theta)$ sono funzioni della sola q , $\mathbf{u}(r,q)$ è il vettore spostamento, $\mathbf{u}_n^I(q)$ e $\mathbf{u}_n^{II}(q)$ sono vettori le cui componenti sono funzioni della sola q .

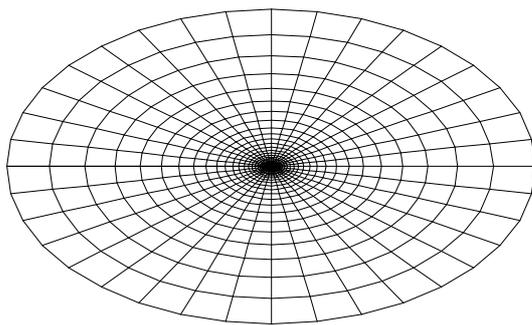


n=0, modo I



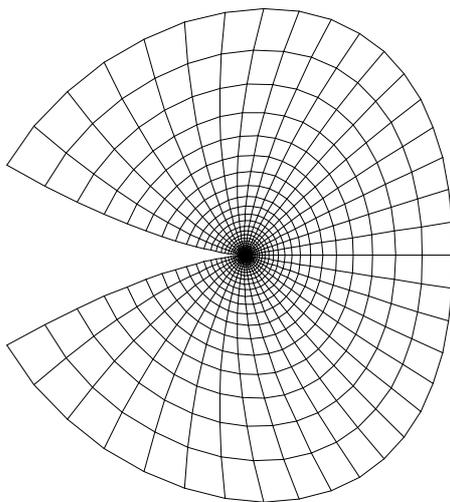
n=0, modo II

Figura 1: configurazione deformata relativa ai termini singolari dell'espansione

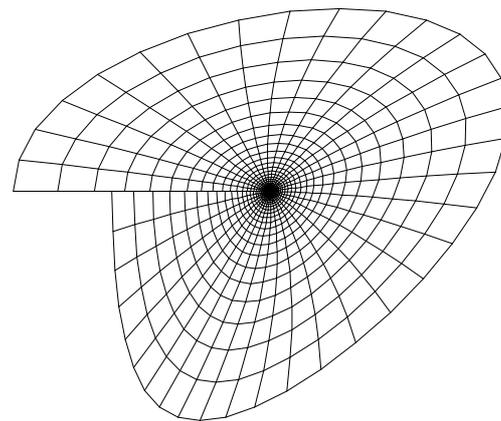


n=1, modo I

Figura 2: configurazione deformata relativa ai primi 2 termini regolari. Per n=1, il modo I corrisponde al termine noto come T-Stress, mentre il modo II non è rappresentato perché consta di una semplice rotazione rigida



n=2, modo I



n=2, modo II

Ciascun termine della sommatoria rappresenta un'autofunzione; gli apici *I* e *II* corrispondono ai termini con campo di spostamento simmetrico oppure antisimmetrico. In Figura 1 sono mostrati i campi di spostamento per $n=0$ relativi al modo *I* e al modo *II*, i cui corrispondenti campi tensionali sono quelli singolari asintotici. In figura 2 sono mostrati i campi di spostamento relativi a $n=1$ per il solo modo *I* e a $n=2$ per entrambi i modi. I campi tensionali per $n>0$ risultano regolari. I campi di spostamento relativi a $n=1$ non producono spostamenti relativi fra i bordi della cricca. Si è omessa la rappresentazione del modo *II* per $n=1$ in quanto esso consta di un semplice moto di rotazione rigida intorno all'apice della cricca. Il modo *I* in questo caso deriva dalla tensione normale costante agente parallelamente alla direzione della cricca e noto come *T-stress*.

PROCEDURA SVD

Nella procedura adottata si sono utilizzate le formule relative all'espansione, troncata al termine n , delle tensioni e degli spostamenti per la determinazione dei coefficienti K_i^I e K_i^{II} , $i=0..n$.

La semplice scrittura di un numero di equazioni pari a quello delle incognite per mezzo della collocazione delle tensioni o degli spostamenti in punti scelti arbitrariamente porta ad un sistema lineare che frequentemente risulta singolare oppure mal condizionato, poiché non tutte le equazioni risultano significative, in relazione al numero di termini adottato e alla posizione dei punti di collocazione.

Si può tentare di superare questo problema con un fitting ai minimi quadrati dei dati a disposizione. Ma anche in questo caso si incorre frequentemente in un sistema mal condizionato, che fornisce soluzioni altamente instabili al variare del numero di punti di collocazione o della loro posizione.

Generando direttamente un sistema di equazioni lineari sovradeterminato, è possibile sfruttare la tecnica *Singular Value Decomposition* (SVD) che consente di ottenere una soluzione che si adatta alle equazioni secondo uno schema che cerca la migliore soluzione nel senso dei minimi quadrati, individuando una base di vettori ortogonali e stabilendo una gerarchia di correlazione che consente l'esclusione di quelli che risultano essere scarsamente correlati.

La procedura è implementata nei più diffusi software di matematica applicata e sono disponibili in letteratura librerie di algoritmi in vari linguaggi di programmazione (Press *et alii*, 1992)

APPLICAZIONE AD UN CASO DI RIFERIMENTO

Il caso preso a riferimento per effettuare una verifica estesa della procedura adottata è quello del disco elastico omogeneo con cricca radiale sollecitato lungo il bordo da una tensione radiale costante (Figura 3). Questa configurazione rappresenta, a conoscenza degli autori, uno dei pochi casi di problemi bidimensionali di frattura caratterizzati da un dominio di dimensioni finite, di cui sia nota la soluzione analitica, sia pure in forma aperta. Inoltre è stata provata l'uniforme convergenza (Tsamasphyros e Theocaris, 1979) dell'espansione di Williams per un dominio elastico con geometria a settore di

cerchio caricato lungo il contorno circolare, e quindi anche per il caso particolare in cui i due lati del settore formano una cricca (Gregory, 1979).

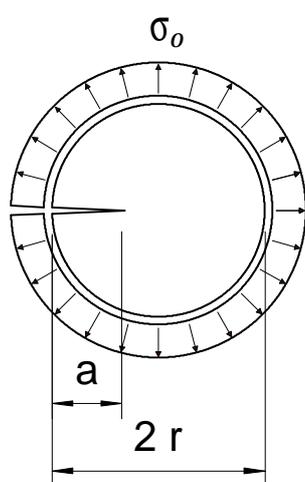


Figura 3: caso di riferimento utilizzato nella verifica della procedura di collocazione

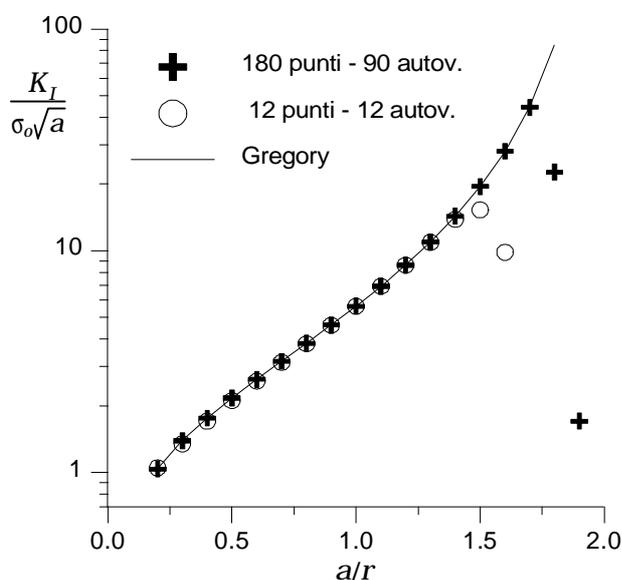


Figura 4: confronto fra i risultati ottenuti con la procedura di collocazione delle tensioni sul bordo e quelli analitici della soluzione di Gregory

Per qualsiasi cricca può essere individuato un settore, da considerare isolato dal materiale circostante e caricato con le tensioni scambiate lungo il contorno circolare.

La soluzione analitica ottenuta da Gregory (Gregory, 1977, 1979) si riferisce a vari casi, fra cui quello di cricca caricata da pressione uniforme, cui è possibile riportarsi dal caso di riferimento per mezzo del principio di sovrapposizione degli effetti. La soluzione è stata ottenuta da Gregory operando una trasformazione conforme del disco criccato in una striscia di estensione infinita. Il fattore di intensità degli sforzi è espresso dalla seguente relazione :

$$\frac{K_I}{K_0} = \frac{2}{K_+(i)} \left[2 - \frac{a}{r} \right]^{-\frac{3}{2}} \quad (2)$$

dove :

$$K_0 = S_0 \sqrt{a} ; \quad K_+(i) = 0.355715...$$

r è il raggio del disco, a è la dimensione della cricca, S_0 è la pressione uniforme agente sulla cricca oppure lo sforzo radiale agente sul bordo del disco.

Collocazione degli sforzi applicati al contorno di un disco criccato radialmente

Il primo test effettuato consiste nella collocazione degli sforzi applicati al bordo del disco illustrato in Figura 3 e nel confronto con la soluzione ottenuta da Gregory. I parametri che influenzano la soluzione sono il numero di punti adottato per la collocazione delle tensioni ed il numero di autofunzioni scelto per la scrittura delle equazioni del sistema sovradeterminato. In particolare, per ogni punto di collocazione, le tensioni radiali e tangenziali applicate lungo il bordo sono espresse per mezzo della

somma dei contributi di ciascuna autofunzione. Nel caso specifico, tenendo conto della simmetria della geometria e della configurazione dei carichi applicati, la collocazione è stata effettuata disponendo punti equispaziati su di una sola metà del disco ed utilizzando le sole autofunzioni simmetriche. I risultati ottenuti sono mostrati in Figura 4, in cui la soluzione analitica per il K_I , è confrontata, al variare del rapporto fra dimensione della cricca e raggio del disco, con le soluzioni ottenute da una collocazione di 90 autofunzioni sulle tensioni in 180 punti e di 12 autofunzioni sulle tensioni in 12 punti. Il numero di equazioni risulta maggiore del numero di incognite, essendo nel primo caso nel rapporto di 360/90 e nel secondo di 24/12. L'aderenza della soluzione ottenuta alla soluzione analitica risulta eccellente. Una perdita di precisione, più marcata nel caso dei 12 punti di collocazione, si manifesta in corrispondenza dei valori estremi del rapporto tra cricca e raggio del disco e risulta maggiormente pronunciata per valori di a/r prossimi a 2.

Effetto del numero di punti di Collocazione

E' importante determinare l'effetto del numero di punti di collocazione adottato, tenendo conto che nei casi applicativi non è possibile stimare l'errore in modo semplice ed immediato; pertanto sarà necessario scegliere i parametri basandosi su analisi di casi di riferimento, quale quello qui illustrato. In Figura 5 è riportato l'errore relativo percentuale per vari rapporti a/r al variare del numero di punti di collocazione adottato. Il numero di autofunzioni è stato scelto pari al numero di punti di collocazione, tenendo conto che in corrispondenza di ogni punto sono scritte due equazioni. Per numero di punti di collocazione maggiore o uguale a 35 il numero di autofunzioni, pari al numero di incognite, è stato mantenuto costante e pari a 35.

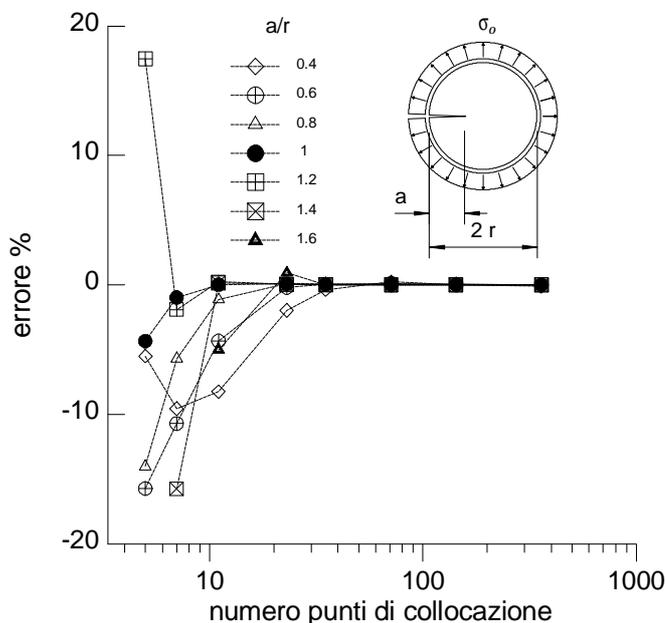


Figura 5: studio della convergenza nella procedura di collocazione del primo autovalore al variare del numero di punti di collocazione utilizzato. Il numero di autovettori utilizzato è pari al numero di punti fino a 35 e quindi mantenuto costante

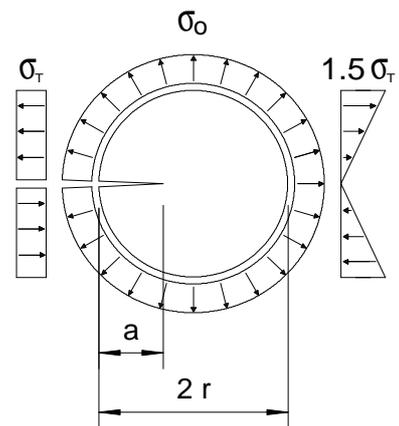


Figura 6: disco criccato con condizione di carico addizionale introdotta per la verifica di convergenza degli autovalori antisimmetrici

Dall'analisi svolta risulta che una collocazione delle condizioni al contorno su 7 punti è sufficiente a riportare l'errore entro l'1%, nel caso di cricca avente la stessa dimensione del raggio, mentre 12 punti di collocazione sono sufficienti a garantire nel caso qui analizzato una precisione ingegneristicamente accettabile in un range esteso di rapporti a/r . Ovviamente questi risultati non possono essere generalizzati ma forniscono delle indicazioni per l'utilizzazione del metodo in altri casi e una prova della sua efficienza computazionale.

Coefficienti delle autofunzioni regolari

La tecnica di collocazione ovviamente fornisce un numero notevole di coefficienti. Lo stesso caso di figura 3 è stato studiato da Vaughan ed altri (Vaughan e Wu,1991) che hanno fornito i primi 6 coefficienti, con una soluzione approssimata dalle quattro alle due cifre significative. Il confronto con i risultati ottenuti è riportato nella Tabella 1.

Tabella 1: Confronto fra i coefficienti ottenuti e quelli riportati in letteratura.

N	presente lavoro $K_n^I/(S_0 \cdot a^{(1-n)/2})$	Gregory, 1979	Vaughan e Wu,1991
0	5.6225	5.62247	5.623
1	2.3765	-	2.377
2	-0.2080	-	-9.208
3	-0.89285	-	0.891
4	-0.29794	-	-0.30
5	-0.15320	-	-0.15

APPLICAZIONE A SET DI DATI DI TIPO SPERIMENTALE

Volendo applicare la collocazione con tecnica SVD a dati ottenuti per via numerica o sperimentale è necessario prima di tutto valutare la procedura nel caso in cui siano presenti contributi di autofunzioni antisimmetriche ed in particolare di quelle con stato tensionale singolare relativo al modo II. Come soluzione di riferimento è stata adottata quella corrispondente allo schema di carico illustrato in Figura 6 in cui, allo sforzo radiale costante sono stati sommati sul contorno gli sforzi derivanti da un configurazione di carichi antisimmetrici autoequilibrati. Per la configurazione di carico illustrata ed in particolare per la parte antisimmetrica del carico non esiste soluzione analitica di riferimento; pertanto il confronto sull'accuratezza della soluzione può essere effettuato verificando la capacità della tecnica di mantenere disaccoppiate le soluzioni simmetriche da quelle antisimmetriche, verificando la convergenza di tutte le soluzioni e confrontando il primo coefficiente con la soluzione analitica.

Lo studio della convergenza è stato effettuato con riferimento ai coefficienti dei primi tre termini dell'espansione, il K_I , il K_{II} ed il T -stress, che rappresentano i risultati più importanti dal punto di vista applicativo.

La Figura 7 illustra l'analisi di convergenza, al variare del numero di autofunzioni utilizzato, della configurazione di carico per tre valori del rapporto a/r . Il numero di

punti di collocazione equispaziati è pari a 143, corrispondenti ad un passo angolare di 2.5° . Il valore di riferimento per il calcolo dell'errore è quello analitico per il primo coefficiente, quello di convergenza con 6 cifre significative stabilizzate per gli altri. In tutti i casi si nota che una procedura di collocazione condotta con 20 autofunzioni è in grado di portare il valore assoluto dell'errore intorno ad $1/1000$ e che 12 autofunzioni sono sufficienti a fornire un'accettabile precisione ingegneristica.

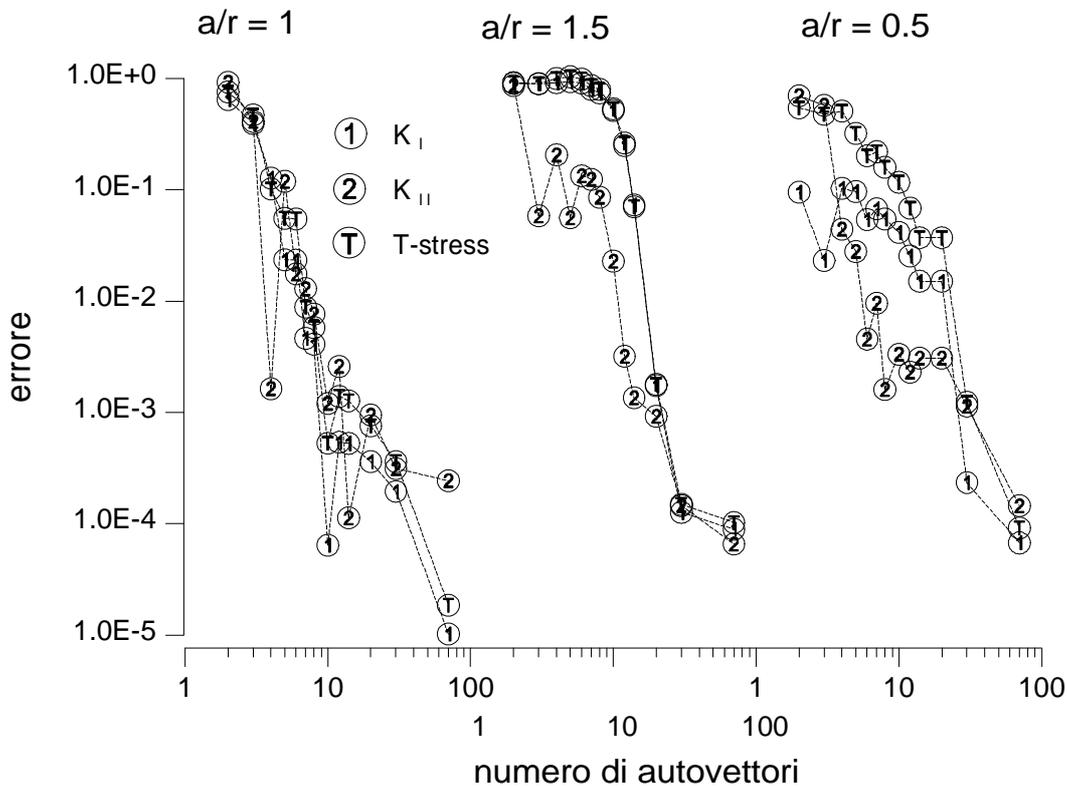


Figura 7 : Collocazione delle tensioni applicate al contorno su 143 punti equispaziati. Studio del valore assoluto dell'errore su K_I, K_{II} e T-stress al variare del numero di autovettori utilizzato.

Dalla figura risulta anche evidente che la migliore convergenza si ha nel caso di cricca di dimensione pari al raggio. In tal caso si ottengono risultati eccellenti effettuando la collocazione con meno di 8 coppie simmetriche ed antisimmetriche di autofunzioni.

Collocazione SVD delle tensioni radiali

Per poter effettuare una serie di verifiche della procedura su dati che simulino quelli provenienti da analisi sperimentali, sono stati generati i punti di collocazione disposti su una o due circonferenze aventi centro sull'apice della cricca e disposti a passo angolare costante.

In corrispondenza di questi punti sono stati generati i dati su cui effettuare la collocazione, partendo da un elevato numero di coefficienti noti¹.

¹ I dati sono stati generati utilizzando i coefficienti a convergenza di 70 coppie di autofunzioni, nella collocazione delle tensioni sul contorno del caso illustrato in Figura 6, per un rapporto a/r unitario.

Quindi si è effettuato uno studio dell'accuratezza e della convergenza avendo come riferimento l'errore nella ricostruzione dei primi tre coefficienti al variare del numero di punti di collocazione e del numero di autofunzioni utilizzato. Nel primo caso studiato la tecnica è stata applicata alla collocazione delle tensioni radiali, volendo simulare un set di dati analogo a quello che potrebbe essere ottenuto da misurazioni estensimetriche, che però forniscono risultati in termini di deformazione. L'analogia consta nel fatto che ciascun estensimetro fornisce la deformazione lungo una sola direzione. I risultati ottenuti sono illustrati nelle Figure 8a e 8b, che riportano in una scala doppio logaritmica il valore assoluto dell'errore relativo di ciascun coefficiente rispetto a quello corrispondente utilizzato per generare il set di dati, in funzione del numero di punti di collocazione. La Figura 8a mostra l'errore ottenuto, nel caso di punti di collocazione disposti su di una sola circonferenza. Si noti che per ogni punto può essere scritta una sola equazione, quindi è opportuno scegliere un numero di coppie di autofunzioni pari al massimo alla metà del numero di punti, per evitare che il sistema, sia pure sovradeterminato, risulti mal condizionato. In realtà è stato verificato che i risultati più affidabili, in termini di convergenza e regolarità di convergenza, si hanno scegliendo un numero di coppie di autofunzioni pari ad un quarto del numero di punti, questo perché un elevato numero di equazioni risulta esse non ben correlato ai dati. Tutto ciò può essere verificato osservando il numero di vettori base eliminati nella procedura SVD. La collocazione effettuata su due raggi differenti, sebbene introduca dati a distanza più elevata rispetto al caso precedente, migliora la qualità della correlazione delle informazioni. Nel caso di collocazione con punti equispaziati su due circonferenze, 10 punti sono sufficienti a determinare K_I , K_{II} e T -stress con un errore contenuto entro il 2%.

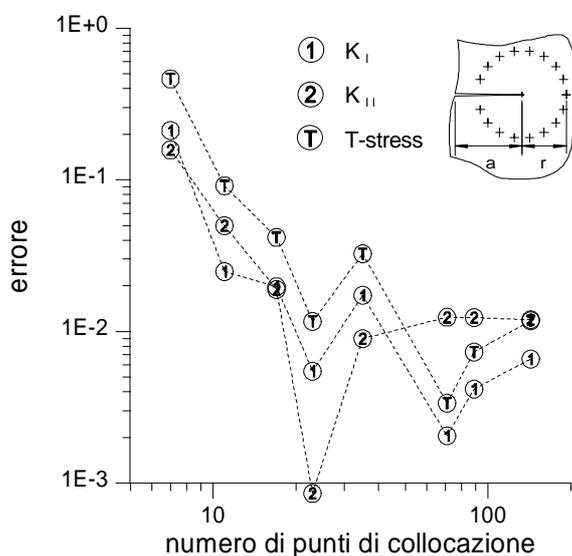


Figura 8a: studio dell'errore di convergenza del K_I e K_{II} e del T -stress nel caso di collocazione delle tensioni radiali con punti su una circonferenza, $r/a=0.5$

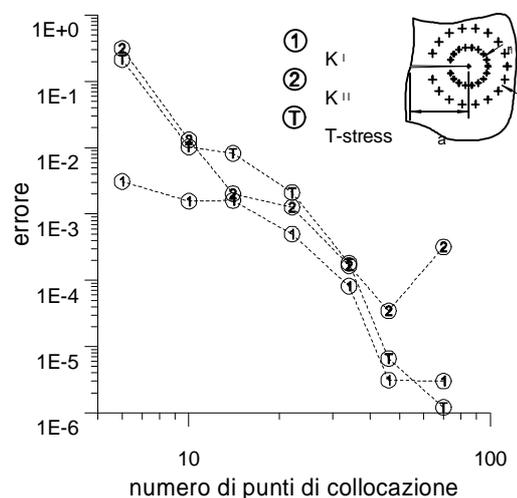


Figura 8b: studio dell'errore di convergenza del K_I e K_{II} nel caso di collocazione delle tensioni radiali con punti equispaziati su due circonferenze concentriche, $a/r = 1$, $r_1/r = 0.5$

Collocazione sugli spostamenti

La collocazione effettuata sugli spostamenti mostra notevoli caratteristiche di stabilità ed accuratezza. Va tenuto conto però che è possibile scrivere 2 equazioni per ogni punto di collocazione. Il rapporto tra numero di punti di collocazione e numero di coppie di autofunzioni è stato mantenuto pari all'incirca a 4/3 e per numeri contenuti di punti di collocazione è possibile assumerlo pari all'unità senza incorrere in problemi di condizionamento. Anche in questo caso la precisione dei risultati migliora notevolmente effettuando la collocazione di punti disposti su raggi differenti e l'errore massimo si riduce all'1/100 per 10 punti di collocazione

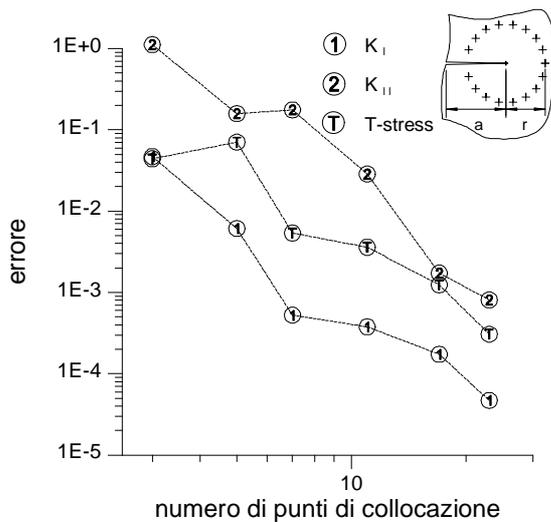


Figura 9a: studio dell'errore di convergenza del K_I e K_{II} nel caso di collocazione degli spostamenti con punti su una circonferenza, $r/a=1$

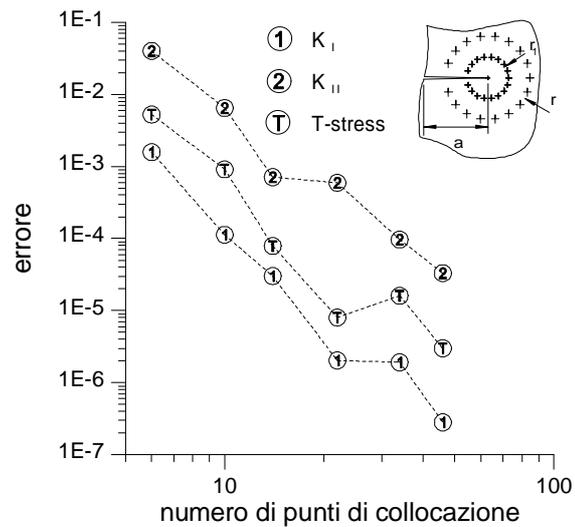


Figura 9b: studio dell'errore di convergenza del K_I e K_{II} nel caso di collocazione degli spostamenti nel caso di collocazione con punti equispaziati su due circonferenze concentriche, $a/r = 1$, $r_1/r = 0.5$

CONCLUSIONI

La collocazione di dati numerici o sperimentali per mezzo della classica tecnica SVD applicata all'espansione completa del campo tensionale di una cricca consente di calcolare con accuratezza i parametri di campo relativi ai termini singolari e regolari, ed in particolare il K_I , il K_{II} ed il T -stress. La procedura si presta particolarmente all'analisi dei dati sperimentali ottenuti da tecniche che forniscono risultati a campo intero, con linee isolivello di varie grandezze fisiche, quali spostamenti, deformazioni, somma delle tensioni principali. Essa risulta facilmente implementabile e può fornire risultati in tempo reale. Inoltre è possibile valutare la convergenza verificando la stabilità della soluzione al variare del numero di punti di collocazione e del numero di autofunzioni scelte per la rappresentazione del campo. Un ulteriore vantaggio offerto dalla tecnica di collocazione proposta, con l'uso di dati sperimentali, è quello di poter scegliere punti di misura in zone

non troppo vicine al campo asintotico, in cui gli andamenti delle grandezze risultano regolari e l'errore della tecnica sperimentale contenuto.

BIBLIOGRAFIA

- Deng, X., 1993, "General Crack-Tip Fields for Stationary and Steadily Growing Interface Cracks in Anisotropic Bimaterials", *J of Appl. Mech.*, 60, 183-190
- Press W.H. et al., 1992, "Numerical Recipes in C. The Art of Scientific Computing", Second Edition, Cambridge University Press.
- Tsamaspheos G., Theocaris, P.S., 1979, "On the solution of the sector problem", *Journal of Elasticity*, 9, 97-112.
- Gregory, R.D., 1979, "The edge-cracked circular disc under symmetrical pin-loading", *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.*, 85, 523-538.
- Gregory, R.D., 1977, "A circular disc containing a radial edge crack opened by a constant internal pressure", *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.*, 81, 497-521
- Vaughan, H., Wu, Q., 1991, "Stresses in a circular disc containing a radial crack", *Q.Jl. Mech.appl.Math.*, 44, Pt.3, 413-438.