

ANALISI TRIDIMENSIONALE DELLE SUPERFICI FRATTALI GENERATE NEL PROCESSO DI ROTTURA DEL CALCESTRUZZO

Alberto Carpinteri, Bernardino Chiaia & Stefano Invernizzi

*Dipartimento di Ingegneria Strutturale, Politecnico di Torino
Corso Duca degli Abruzzi 24 - 10129 Torino*

SOMMARIO: La superficie di frattura, nei materiali eterogenei quali il calcestruzzo, presenta morfologia complessa non caratterizzabile correttamente nell'ambito della geometria euclidea tradizionale. Essa è infatti il risultato di una interazione a diverse scale delle imperfezioni presenti nel materiale. I pori preesistenti e le microfessure che si originano all'interfaccia tra inerti e pasta cementizia, durante il processo di carico, si propagano e coalescono sino a formare la frattura macroscopica finale. L'esistenza di diverse scale di interazione del fenomeno produce una superficie con morfologia autosomigliante al variare della scala di osservazione. Negli ultimi anni si è compreso che la geometria frattale si presta a descrivere efficacemente tale fenomeno. Si presenta, in questo lavoro, una innovativa campagna sperimentale che, mediante un sensore laser, permette di rilevare l'intera superficie con una risoluzione tale da porre in evidenza il disordine microstrutturale. Sono quindi illustrate le metodologie applicate per calcolare la dimensione frattale della superficie. Infine, l'accento è posto sulle conseguenze meccaniche della frattalità, in particolare sull'energia che si dissipa nella formazione di tali superfici invasive.

PAROLE CHIAVE: superficie di frattura, geometria frattale, energia di frattura.

INTRODUZIONE

La meccanica della frattura tradizionalmente considera una dissipazione energetica, in presenza di rottura fragile, di tipo esclusivamente superficiale. In realtà, a causa dei meccanismi di frattura, la dissipazione per danneggiamento ha luogo anche in una zona di processo adiacente. Carpinteri (1994) ha proposto una descrizione a livello mesoscopico, attraverso la quale la dissipazione risulta intermedia tra superficiale e volumetrica. Si abbandona la canonica descrizione euclidea dei campi tensionali e deformativi e si passa alle dimensioni frattali degli stessi. Ciò, fra l'altro, permette di giustificare con grande precisione l'effetto di scala sull'energia di frattura nominale (Carpinteri e Chiaia, 1995a). Il processo di frattura fragile è repentino e catastrofico ma, come ogni fenomeno critico, rappresenta una transizione tra una fase di interazione metastabile delle microfessure e una fase di coalescenza e propagazione macroscopica. L'autosomiglianza della distribuzione dei microdifetti interni è stata interpretata teoricamente e verificata sperimentalmente, permettendo, tra l'altro, di giustificare l'effetto di scala sulla resistenza nominale (Carpinteri et alii, 1997). Allo stesso modo, la frattalità (autosomiglianza) delle superfici è stata rilevata in vari materiali dotati di microstruttura disordinata (Coster e Chermant, 1983). Appare quindi naturale cercare un legame tra la geometria dei

microdifetti preesistenti e quella della superficie di frattura finale. Il legame tra le due fasi è da ricercarsi nella distribuzione disordinata delle caratteristiche meccaniche dei microcostituenti dei materiali fragili, nel loro rapporto gerarchico e nella loro topologia. In presenza di calcestruzzi normali, è oggi assodato che "attrattori" della propagazione fragile sono le interfacce tra inerti e matrice cementizia, che risultano estremamente porose. La superficie di frattura finale rappresenta il dominio risultante dalla correlazione a tutte le scale tra questi attrattori e, come risultato dell'interazione tra casualità ed ottimizzazione energetica, possiede caratteristiche topologiche frattali.

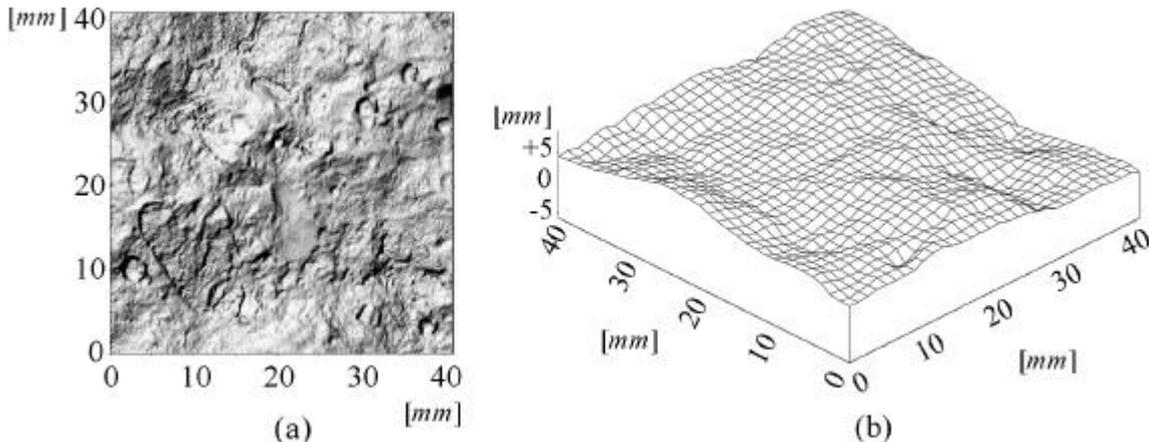


Figura 1: rendering della superficie rilevata (a), e visione assometrica (b).

Lo studio delle caratteristiche frattali delle superfici di frattura nel calcestruzzo è stato finora portato avanti dagli autori analizzando singoli profili bidimensionali (Carpinteri e Chiaia, 1995a). Ciò ha consentito un sostanziale risparmio in termini di tempi di acquisizione e sforzo computazionale. D'altra parte, pur considerando diversi profili per ogni interfaccia, l'analisi bidimensionale non consente di cogliere tutti gli aspetti correlativi della propagazione, che sono essenzialmente tridimensionali.

METODOLOGIA SPERIMENTALE

Il tentativo di effettuare prove non distruttive al fine di poter acquisire automaticamente l'intera topografia di provini fratturati non è del tutto nuovo. Issa e Hammad (1994), hanno proposto, ad esempio, una digitalizzazione mediante acquisizione fotografica della superficie del provino fratturato immerso in una soluzione che differenziasse la luminosità alle diverse quote. Tale tecnica, tuttavia, limitava fortemente la precisione raggiungibile nell'acquisizione, per curve di livello, della superficie di frattura. Con il presente lavoro, si intende invece proporre una metodologia basata sull'utilizzo di un distanziometro laser.

L'acquisizione della superficie mostrata in Fig. 1 è stata effettuata rilevando la quota di una griglia di punti così come avviene per i rilevamenti topografia. La prova presuppone due problematiche fondamentali da risolvere: la prima riguarda il controllo necessario per raggiungere la posizione del punto la cui quota si vuole misurare; la seconda riguarda l'acquisizione vera e propria.

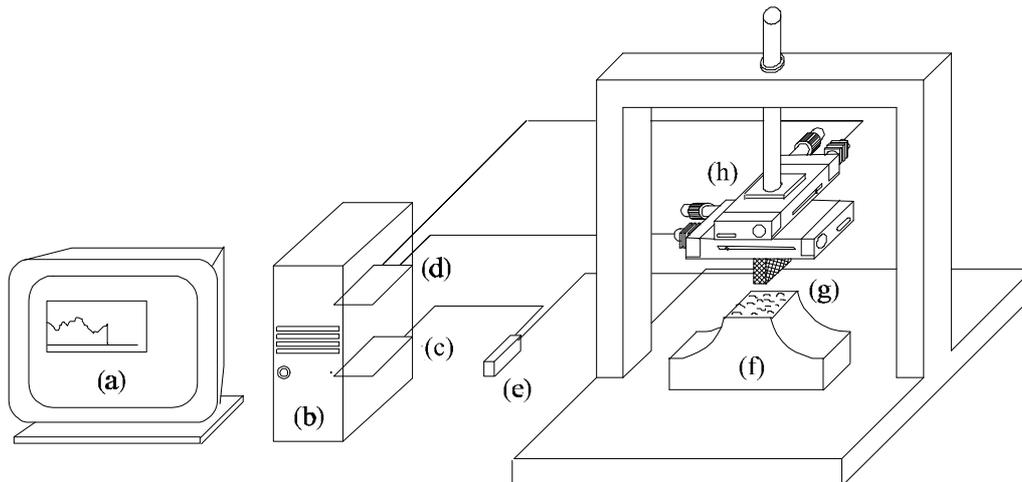


Figura 2: componenti dell'apparecchiatura, monitor (a), PC case (b), PC-LPM-16 (c), MM2000 (d), LB72 (e), provino fratturato (f), LB12 (g), UE30CC (h).

Il processo deve essere naturalmente automatizzato a causa del gran numero di punti da rilevare. L'apparato di prova, mostrato schematicamente in Fig. 2, è costituito da una intelaiatura massiccia cui è reso solidale il provino di calcestruzzo, a forma di clessidra, precedentemente rotto in trazione. Vi è poi un asse che permette di spostare verticalmente il distanziometro laser in modo che la distanza dalla superficie sia compresa nel *range* ottimale di misurazione. Il laser è solidale al telaio solo in direzione verticale e può invece essere mosso orizzontalmente mediante due motori micrometrici ortogonali (UE30CC, UT 100-100 μm) pilotati mediante l'interfaccia MM2000 (Newport KlingerTM), direttamente inserita in uno slot bus ISA di un personal computer. Il distanziometro laser è del tipo LB-12, ed è attivato mediante un controller LB-72 (entrambe di fabbricazione KeyenceTM). La misurazione della distanza avviene per mezzo del conteggio dei cicli d'onda trascorsi tra il momento in cui il raggio laser viene emesso ed il momento in cui esso viene ricevuto per riflessione. Per effettuare tale misurazione con una precisione di 2 μm , il distanziometro deve sostare sul punto da rilevare per almeno 60 μs . Per questa ragione non è stato possibile eseguire il rilievo con continuità ma per passi discreti successivi, a spese del tempo totale di acquisizione. In uscita dal *controller* del laser, si ottiene un segnale analogico in tensione (0-10 V) che viene convertito in un segnale digitale (16bit di precisione) mediante una scheda di acquisizione DAQ PC-LPM-16 (National InstrumentTM) anch'essa inserita in una *slot* con bus ISA del medesimo personal computer. Per l'alimentazione dei motori e del laser sono stati utilizzati gli appositi canali disponibili sulla scheda di acquisizione, in modo da realizzare un apparato di prova compatto ed autosufficiente. Si è quindi provveduto a sviluppare un software ad *hoc* al fine di risolvere i problemi di controllo ed acquisizione. Il rilievo adoperato per le analisi presentate nel seguito consiste in una superficie di frattura ottenuta da un provino di calcestruzzo rotto da una sollecitazione di tensione uniforme. Si è rilevata una griglia quadrata di punti equispaziati di 20 μm , di dimensione 2049 x 2049 punti, corrispondente ad un'area totale pari a 16 cm^2 . Tale rilevazione ben si concilia con le esigenze numeriche dell'analisi frattale in quanto, il metodo *patchwork* richiede una successione diadica di intervalli e, per poter usufruire dei vantaggi dell'algoritmo *Fast Fourier Transform* nell'analisi spettrale bidimensionale, occorre una maglia quadrata in cui il numero di punti rilevati sia esprimibile come potenza di 2.

La scelta dell'intervallo di discretizzazione deve essere fatta tenendo presenti tre principali aspetti critici. Il primo riguarda la rappresentatività dell'acquisizione. Siccome il calcestruzzo in esame è stato confezionato con un inerte di dimensione massima di 2 cm occorre rilevare una zona di almeno 4 x 4 cm. Secondo fattore è la mole dei dati da immagazzinare, da considerare anche nell'ottica delle analisi da compiere successivamente. Infine, è necessario tenere in conto la durata della prova che è comunque dell'ordine di alcuni giorni. Tali fattori hanno condotto alla scelta dell'ampiezza dell'intervallo di discretizzazione pari a 20 μm . Tale valore rappresenta infatti un compromesso tra il desiderio di investigare risoluzioni sempre più fitte e quello di contenere i tempi di acquisizione i quali crescono, a parità di superficie, come il quadrato della frequenza. Un'ulteriore limitazione da considerare è l'ampiezza dell'impronta (spot) che il laser traccia sulla superficie che è piccola ma non nulla. Al fine ottenere un risultato rappresentativo, nei confronti dell'eterogeneità del calcestruzzo, si è pianificato di acquisire una superficie di almeno 16 cm^2 . Tale acquisizione richiede circa una settimana.

I problemi sperimentali descritti derivano dal principale aspetto da tenere in conto nello studio dei sistemi naturali con caratteristiche frattali, rappresentato dall'intervallo di validità della descrizione frattale. Tale intervallo dipende dalla micro- e meso-struttura del materiale in esame. Qualora l'indagine fosse rivolta a materiali quali i metalli od i ceramici, le scale da considerare sarebbero molto inferiori e le modalità di acquisizioni verrebbero naturalmente dirette verso strumenti assai più precisi, quali i microscopi a scansione elettronica (Coster e Chermant, 1983).

METODI NUMERICI PER L'ANALISI DI SUPERFICI FRATTALI

Nonostante gli algoritmi per il calcolo della dimensione frattale siano in teoria abbastanza semplici, la loro applicazione agli insiemi reali presenta numerose difficoltà. La dimensione frattale viene infatti calcolata mediante una estrapolazione, analizzando la variazione (pendenza della curva) di una certa quantità in funzione della risoluzione, in un diagramma bilogarithmico. Il valore ottenuto dipende quindi fortemente dall'intervallo di scala considerato. Per *frattali naturali* non si ha, in generale, un unico valore della pendenza (monofrattalità), ma si ottiene sperimentalmente una variazione continua della pendenza, fenomeno denominato multifrattalità geometrica (Carpinteri e Chiaia, 1995a). Tale fenomeno deriva dalla presenza di due scale limite nel fenomeno, una massima (dimensione dell'oggetto), ed una minima (step di digitalizzazione). Un secondo aspetto è rappresentato dai tempi di calcolo onerosi e dalle grandi quantità di memoria necessaria per l'immagazzinamento dei dati.

Gli algoritmi utilizzati sono noti in bibliografia ma è stato necessario estenderli ed ottimizzarli per renderli utilizzabili in pratica nel caso tridimensionale. Il primo metodo preso in considerazione discende da una delle possibili definizioni di dimensione frattale, la cosiddetta dimensione di ricoprimento (Barnsley, 1988). Il metodo è noto con il nome di metodo *delle celle di ricoprimento* (*box-counting method*), e consiste nel conteggiare il numero N di cubi necessari a ricoprire l'intera superficie, al variare della dimensione lineare dei cubi (Fig. 3a).

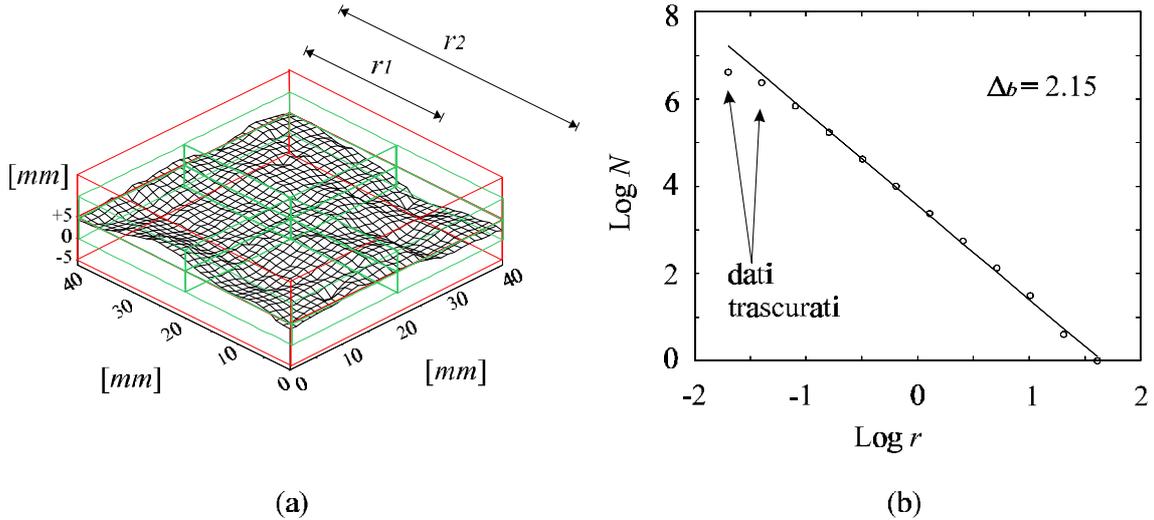


Figura 3: metodo delle celle di ricoprimento: schema del ricoprimento (a), diagramma bilogarithmico (b).

Un frattale statisticamente autosomigliante è per definizione isotropo. Nello spazio tridimensionale, l'insieme $f(x, y, z)$ risulterà quindi statisticamente simile a $f(rx, ry, rz)$, dove r è il *fattore di scala*. Detto N_1 il numero di cubi di dimensioni x_1, y_1, z_1 necessari a ricoprire l'intero insieme, ed N_2 il numero di cubi di dimensioni $x_2 = rx_1, y_2 = ry_1, z_2 = rz_1$, se l'insieme è autosomigliante si avrà che $N_2/N_1 = r^{-\Delta_b}$. Il comportamento di scala mostrato dalla superficie di frattura è invece anisotropo, il frattale in considerazione è quindi autoaffine. La definizione formale di tale insieme prevede che $f(x, y, z)$ sia statisticamente simile a $f(rx, ry, r^H z)$, dove H è l'*esponente di Hurst*. È ancora possibile calcolare la dimensione frattale dell'insieme mediante il metodo delle celle di ricoprimento, a condizione che queste siano riscalate in maniera anisotropa mediante l'esponente H (Mandelbrot, 1985). Quindi, se N_1 è il numero di prismi di dimensioni x_1, y_1, z_1 e N_2 il numero di prismi di dimensioni $x_2 = rx_1, y_2 = ry_1, z_2 = r^H z_1$, la dimensione frattale dell'insieme autoaffine diviene nuovamente pari a Δ_b dove:

$$N_1 / N_2 = r^{-\Delta_b} \quad (1)$$

Il numero di prismi ricoprenti è riportato, in funzione del loro lato, nel diagramma bilogarithmico ($\log N - \log r$), in Fig. 3b, nel quale la pendenza della retta indica la dimensione frattale dell'insieme.

La dimensione frattale è stata anche calcolata utilizzando il metodo della triangolazione superficiale (Clarke, 1986). Si considera la variazione dell'area nominale della superficie, all'aumentare della risoluzione con cui questa viene rilevata.

All'uopo, si utilizzano maglie di rilevamento via via più fitte. All'interno di ogni maglia quadrata, come mostrato in "Fig. 4a", viene ricavato un punto virtuale di quota media tra le quote dei nodi:

$$z_{i+1/2, j+1/2} = \frac{z_{i,j} + z_{i,j+1} + z_{i+1,j+1} + z_{i+1,j}}{4} \quad (2)$$

È quindi possibile calcolare l'area della superficie approssimata mediante sommatoria di aree triangolari.

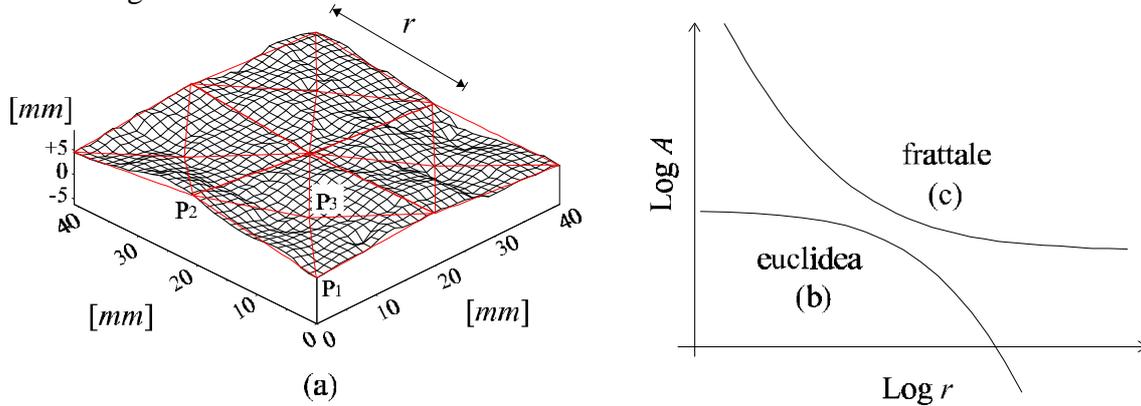


Figura 4: metodo patchwork: schema della triangolazione (a), comportamento euclideo (b), comportamento frattale (c).

Per fare ciò si calcola la lunghezza dei lati 1 mediante il Teorema di Pitagora:

$$l_{(i,j)-(i,j+1)} = \sqrt{(z_{i,j+1} - z_{i,j})^2 + r^2} \quad (3)$$

dove r è il lato della maglia. L'area del triangolo S con vertici nei punti $P_1(i, j)$, $P_2(i, j + 1)$, $P_3(i + 1/2, j + 1/2)$, si ottiene mediante la Formula di Erone:

$$S_{1,2,3} = \sqrt{m(m - l_{1-2})(m - l_{2-3})(m - l_{3-1})} \quad (4)$$

dove:

$$m = \frac{1}{2}(l_{1-2} + l_{2-3} + l_{3-1}) \quad (5)$$

La bontà dell'approssimazione cresce all'aumentare della risoluzione. Come noto, se la superficie in esame ha dimensione topologica intera (Fig. 4b), l'algoritmo converge, più o meno rapidamente, ad un valore finito. Se la superficie è invece un frattale (Fig. 4c) la misura dell'area diverge con una rapidità che dipende dalla dimensione non intera dell'insieme. In tal caso la dimensione frattale è data da:

$$\Delta_p = 2 - \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\log A(r)}{\log r} \quad (6)$$

In Fig. 5a è mostrato il diagramma bilogarithmico ottenuto dall'analisi *patchwork* dei dati sperimentali da cui emerge una dimensione frattale, nel limite delle scale più piccole, pari a $\Delta_p = 2.29$. Si può osservare come la frattalità emerga più chiaramente alle piccole scale.

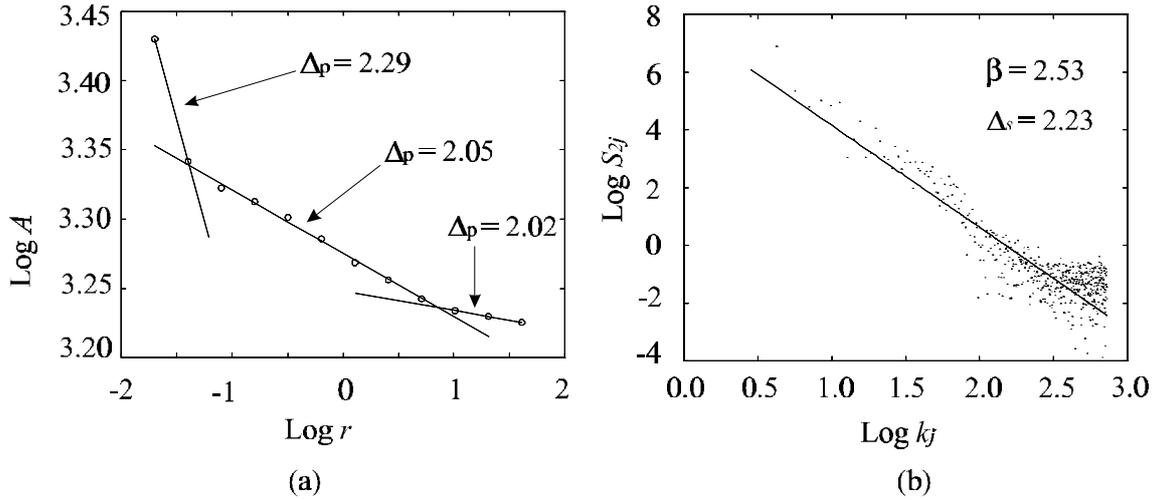


Figura 5: diagrammi bilogartítmici: metodo patchwork (a), metodo spettrale (b).

Ciò è dovuto alla autoaffinità della superficie di frattura, che appare liscia se osservata a distanza mentre mette in luce la sua natura disordinata quanto più venga osservata nei particolari.

Si noti come il metodo delle celle di ricoprimento stimi la dimensione frattale mediante elementi (i prismi) dotati di dimensione topologica pari a tre, che approssimano la superficie quasi fosse un volume particolarmente rarefatto. Pertanto, la misura del ricoprimento tende a zero nel limite delle alte risoluzioni ($r \rightarrow 0$). Attraverso la triangolazione superficiale, invece, si approssima la frattura in maniera concettualmente opposta, ossia mediante elementi (i triangoli) dotati di dimensione topologica pari a due, la cui misura diverge nel limite di altissime risoluzioni.

La dimensione frattale è stata infine calcolata anche con il *metodo spettrale bidimensionale* (Tureotte, 1992). Tale metodo è definito specificamente per insiemi frattali autoaffini. Si considera una griglia quadrata di $N \cdot N$ punti equispaziati di lato L . Le N^2 quote siano indicate con h_{nm} , ove con (n, m) si indica la proiezione sul piano orizzontale del punto, nelle direzioni x e y rispettivamente. Il primo passo consiste nel calcolare la trasformata discreta di Fourier (se la griglia è una successione diadica è possibile utilizzare l'algoritmo FFT) dell'insieme di punti. Il risultato è una matrice $N \cdot N$ di coefficienti complessi H_{st} ottenuti secondo la definizione usuale:

$$H_{st} = \left(\frac{L}{N} \right)^2 \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{N-1} h_{nm} \exp \left[- \frac{2\pi i}{N} (sn + tm) \right] \quad (7)$$

dove s indica la frequenza spaziale nella direzione x ($s = 0, 1, 2, \dots, N - 1$) e t quella nella direzione y ($t = 0, 1, 2, \dots, N - 1$). Ad ogni coefficiente H_{st} occorre quindi assegnare una frequenza radiale equivalente pari a:

$$r = (s^2 + t^2)^{\frac{1}{2}} \quad (8)$$

La potenza spettrale media S_{2j} , relativa al numero d'onda radiale k_j , si ottiene come:

$$S_{2j} = \frac{1}{L^2 N_j} \sum_1^{N_j} |H_{st}|^2 \quad (9)$$

dove N_j è il numero di coefficienti complessi per cui $i < r < j+1$, e la sommatoria è estesa a tutti i coefficienti che verificano tale disuguaglianza. Quando l'insieme analizzato è frattale, la potenza spettrale media segue una legge di potenza in funzione della frequenza radiale k_j :

$$S_{ij} = k_j^{-b-1} \quad (10)$$

Il coefficiente -1 compare in quanto ci si riferisce alla frequenza radiale. La potenza spettrale media in funzione della frequenza fornisce quindi una retta di pendenza β in un grafico bilogarithmico. La relazione che fornisce la dimensione frattale della superficie, in funzione di β , è la seguente:

$$\Delta_s = \frac{7 - b}{2} \quad (11)$$

Nel caso della superficie di calcestruzzo rilevata (Fig. 1) l'analisi spettrale porge il valore $\Delta_s=2.23$ (Fig. 5b)

DISCUSSIONE DEI RISULTATI

La determinazione delle proprietà frattali di un qualsiasi insieme reale avviene mediante un processo di digitalizzazione che comporta la discretizzazione dell'insieme. Occorre quindi ricordare, nella valutazione dei risultati, che qualsiasi tecnica di acquisizione sperimentale è caratterizzata da una lunghezza esterna di cut-off che si sovrappone alla lunghezza caratteristica interna del dominio analizzato. Di qui nasce la necessità di definire chiaramente un limite inferiore per il regime di scaling in considerazione. Tale intervallo di frattalità deve quindi essere individuato singolarmente per ogni diverso materiale.

La sperimentazione condotta ha confermato il carattere frattale *invasivo* ($\Delta >$ dimensione topologica) della superficie di frattura. L'energia di frattura dissipata su tale dominio frattale deve quindi essere considerata come intermedia tra energia superficiale (ipotesi della meccanica della frattura) ed energia volumetrica (ipotesi della teoria della plasticità e della meccanica del danneggiamento). Quando si considera la propagazione di una frattura autoaffine si ha come conseguenza meccanica un comportamento multifrattale. Nonostante ulteriori conferme sperimentali siano necessarie, il disordine *Browniano* (caratterizzato da un incremento dimensionale pari ad $+1/2$, ossia $\Delta_{\text{superficie}} = 2.5$) sembra costituire il limite massimo teorico per la micro-complessità.

Dal punto di vista della meccanica della frattura, il concetto di frattalità permette di spiegare elegantemente la *crescita stabile della* frattura caratteristica della prima fase di propagazione. Questo comportamento deriva dall'attenuazione della singolarità tensionale all'apice della frattura (Carpinteri e Chiaia, 1995b). Di conseguenza, il fattore di intensificazione degli sforzi risulta meno severo (cioè con dimensioni fisiche intermedie

tra quelle di K_I e quelle della tensione σ) ed il comportamento macroscopico nel complesso più duttile. Estendendo il noto criterio di Griffith per la propagazione fragile al caso di frattura frattale, Carpinteri e Chiaia (1995b) hanno ricavato un parametro di tenacità innovativo, il *fattore di intensificazione degli sforzi* frattale, il quale presenta le seguenti dimensioni fisiche anomale:

$$[K_I^*] = [F][L]^{-\left(\frac{3+d_G}{2}\right)} \quad (12)$$

Generalizzando la soluzione di Irwin, si può ottenere la seguente espressione del campo tensionale asintotico in prossimità della fessura:

$$S_{ij} = K_I^* r^{-\left(\frac{1-d_G}{2}\right)} f_{ij}(Q) \quad (13)$$

dove d_G è l'incremento non intero della dimensione del dominio della frattura rispetto alla dimensione superficiale canonica. Quando $d_G = 0$ ($\Delta = 2$) si ritrovano le relazioni classiche della meccanica della frattura elastica lineare (con singolarità tensionale $\approx r^{-1/2}$). Quando invece $d_G = 1$, come caso limite, si ottiene che la singolarità tensionale scompare e non si ha nessun fenomeno di localizzazione. Il fenomeno di dissipazione risulta, in questo caso, di tipo volumetrico ($\Delta = 3$). Questa teoria spiega coerentemente il comportamento tipo *R-curve*. Mentre nel caso di fratture lisce la resistenza alla propagazione è circa indipendente dalla lunghezza della fessura a , in presenza di fratture frattali questa aumenta al crescere di a , secondo una *legge di potenza* con esponente pari all'incremento dimensionale frazionario d_G . Quindi, siccome d_G tende progressivamente a zero al crescere della zona danneggiata (multifrattalità geometrica), si rileva sperimentalmente un plateau nella curva di resistenza alla frattura. La transizione dimensionale è anche responsabile della minor velocità di propagazione rispetto alla velocità di Raleigh teorica. Dal punto di vista strutturale, l'effetto di scala positivo sul valore nominale della tenacità (K_{Ic} oppure G_F) nelle strutture reali può essere spiegato adeguatamente tenendo in considerazione la complessità del fenomeno di dissipazione energetica che avviene, a livello del materiale, su di uno spazio frattale. Carpinteri (1994) ha dimostrato che, se b è la dimensione di riferimento della struttura, l'energia di frattura nominale G_F (dimensionalmente pari a $[F][L]^1$) cresce con la dimensione con una pendenza pari a d_G nel grafico bilogaritmico $\log G_F - \log b$. Se si considera il dominio monofrattale ($d_G = \text{costante}$), si ottengono valori dell'energia di frattura tendenti ad infinito per dimensioni molto grandi. Occorre quindi tenere in conto la multifrattalità del dominio della frattura, e ricondursi alla Legge di Scala Multifrattale (MFSL) per l'energia di frattura (Carpinteri e Chiaia, 1996). L'espressione analitica di tale legge è la seguente:

$$G_F(b) = G_F^\infty \left[1 + \frac{l_{ch}}{b} \right]^{-1/2} \quad (14)$$

dove G_F^∞ è l'energia di frattura nominale asintotica, valida nel limite di dimensioni strutturali infinite ($b \rightarrow \infty$), e l_{ch} è la lunghezza caratteristica interna, che determina la zona di transizione tra il regime euclideo e quello frattale. Sulla base della MFSL,

l'energia di frattura nominale risulta un parametro fisico significativo esclusivamente nel regime di comportamento omogeneo, ossia per grandi dimensioni. Da un punto di vista ingegneristico, la MFSL permette estrapolazioni a partire dai risultati sperimentali ottenuti in laboratorio su campioni di scala ridotta, al fine di ottenere valori attendibili dell'energia di frattura per le strutture reali, di dimensioni molto maggiori (Carpinteri e Chiaia, 1996).

BIBLIOGRAFIA

- Barnsley, M.F., 1988, "Diactals Everywhere", Academic Press, New York.
- Carpinteri, A. 1994, Fractal nature of material microstructure and size effects on apparent mechanical properties", *Mechanics of Materials*, Vol.18, pp.89-101.
- Carpinteri, A. and Chiaia, B., 1995a, " Multifractal nature of concrete fracture surfaces and size effects on nominal fracture energy", *Materials and Structures*, Vol.28, pp.435-443.
- Carpinteri, A. and Chiaia, B., 1995b, " Crack-resistance behavior as a consequence of self-similar fracture topologies", *International Journal of Fracture*, Vol.76, pp.327-340.
- Carpinteri, A. and Chiaia, B., 1996, "Size effects on concrete fracture energy: dimensional transition from order to disorder", *Materials and Structures*, Vol.29, pp.259-266.
- Carpinteri, A., Ferro, G. and Invernizzi, S., 1997, "The nominal tensile strength of disordered materials: a statistical fracture mechanics approach", in corso di pubblicazione su *Engineering Fracture Mechanics*.
- Clarke, K.C., 1986, "Computation of the fractal dimension of topographic surfaces using the triangular prism surface area method", *Computer & Geosciences*, Vol.12, pp.713-722.
- Coster, M., & Chermant, J.L., 1983, "Mathematical morphology and quantitative fractography", *Int. Met. Rev.*, Vol.28, pp. 228-250.
- Issa, M.A., Hammad, A.M., 1994, "Assessment and evaluation of fractal dimension of concrete fracture surface digitized images", *Cement and Concrete Research*, Vol.24, pp.325-334.
- Mandelbrot, B.B., 1985, "Self-affine fractals and fractal dimension", *Physical Scripta*, Vol.32, pp.257-260.
- Turcotte, D.L., 1992, "Fractal and Chaos in Geology and Geophysics", Cambridge University Press, Cambridge.